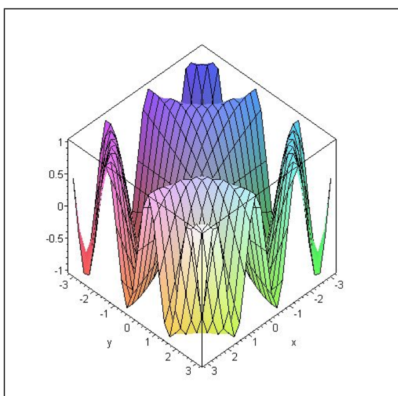
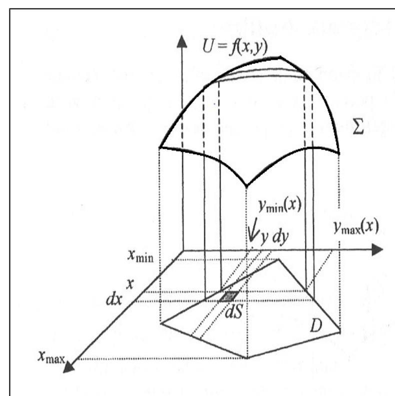
Université Hassan II- Casablanca

Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia

Fonctions de plusieurs variables
Calcul intégral





Polycopié TD M135

Parcours MIP

Promo 2015-2016

Par : Dr Mohammed Harfaoui

TABLE DES MATIÈRES

0.1 Avant-propos

Ce polycopié s'adresse à des étudiants de la deuxième année d'un DEUST.

Veuillez noter que vous n'obtiendrez pas grande chose si vous vous limitez à choisir un exercice, y réfléchir une minute et aller vite voir le début de la correction en passant tout le temps à essayer de comprendre la correction qui va paraître incompréhensible. Pour que la méthode d'étude soit vraiment efficace, il faut d'abord vraiment essayer de chercher la solution. En particulier, il faut avoir un papier brouillon à coté de soi et un crayon.

La première étape consiste alors à traduire l'énoncé (pas le recopier), en particulier s'il est constitué de beaucoup de jargon mathématique. Ensuite il faut essayer de rapprocher les hypothèses de la conclusion souhaitée, et pour cela faire quelques calculs ou transformer les hypothèses pour appliquer un théorème dont on aura vérifier que les hypothèses sont bien satisfaite. C'est ici que l'intuition joue un grand rôle et il ne faut pas hésiter à remplir des pages pour s'apercevoir que l'idée qu'on a eu n'est pas la bonne. Elle pourra toujours resservir dans une autre situation. Quand finalement on pense tenir le bon bout, il faut rédiger soigneusement en s'interrogeant à chaque pas sur la validité (logique, mathématique) de ce qu'on a écrit. Si l'étape précédente ne donne rien, il faut chercher de l'aide.

De plus, ne vous étonnez pas si vous découvrez des erreurs. Merci de me les communiquer
(**mharfaoui04@yahoo.fr**).

0.2 Fonctions de plusieurs variables

0.2.1 Domaines de définitions et graphes

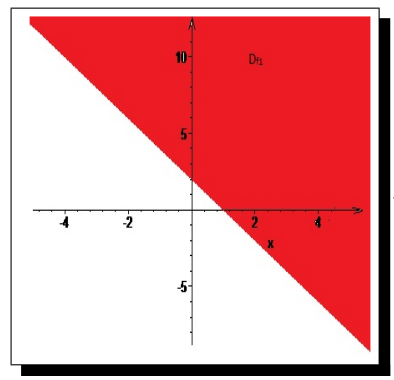
Exercice 0.2.1.1
Représenter les domaines de définition des fonctions suivantes

1. $f_1(x, y) = \ln(2x + y - 2)$,
2. $f_2(x, y) = \sqrt{1 - xy}$,
3. $f_3(x, y) = x^{-1}.\ln(y - x)$,
4. $f_4(x, y) = (x^2+y^2-1)^{-1/2}.\sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

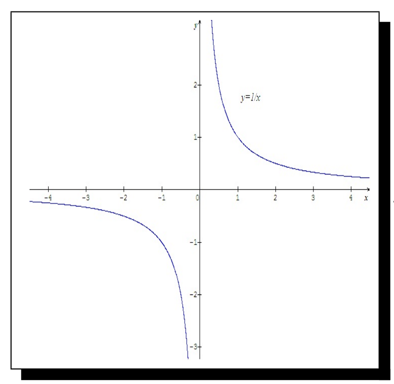
Corrigé 0.2.1.1

1. *Le domaine de la fonction* $t \to \ln(t)$ *est* $\mathbb{R}_+^*$. *Donc Le domaine de définition de* f_1 *est*

   $D_{f_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/2x + y - 2 > 0\}$. *On trouve donc le demi-plan supérieur délimité par la droite d'équation* $2x + y - 2 = 0$ *(Figure 1).*

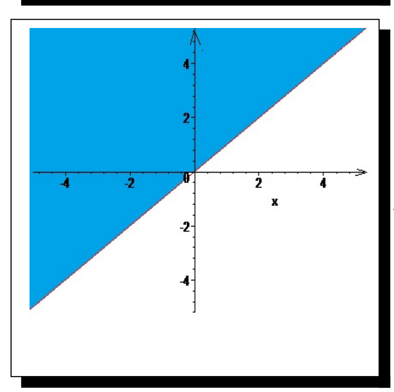


2. *Le domaine de définition de* f_2 *est* $D_{f_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/1 - xy \geq 0\}$, *or* $1 - xy \geq 0$ *si et seulement si* $y \leq \dfrac{1}{x}$, *si* $x > 0$, $y \geq \dfrac{1}{x}$, *si* $x < 0$. *C'est donc la réunion de la partie située sous l'hyperbole* $y = \dfrac{1}{x}$ *pour* $x > 0$, *de la partie située au-dessus de l'hyperbole pour* $x < 0$, *et de l'axe des ordonnées (Figure 2).*

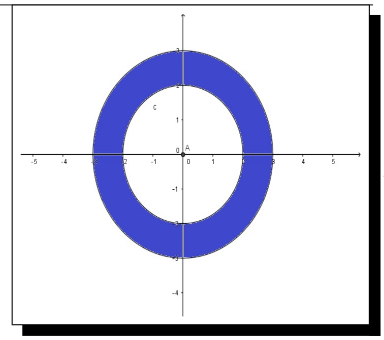


3. *Le domaine de définition de* f_3 *est*

   $D_{f_3} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x \neq 0$ *et* $y - x > 0\}$.
   C'est donc le demi-plan, auquel on a retiré une (portion de) droite (Figure 3).



4. *Le domaine de définition de f_4 est* $D_{f_4} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 1 > 0$ *et* $4 - x^2 - y^2 \geq 0\}$.
   Les conditions $x^2 + y^2 - 1 > 0$ *et* $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ *représentent la couronne située entre les cercles de centre* $O(0,0)$ *et de rayon respectifs* 1 *et* 2, *privée du premier cercle (premier cercle n'est pas dans le domaine, le second y est) (Figure 4).*



Exercice 0.2.1.2 ***Lignes de niveau.***
Quelles sont les lignes de niveau (c'est-à-dire les fonctions $f(x,y) = k$) pour

1. $f_1(x,y) = y^2$, *avec* $k = 1$ *et* $k = -1$.
2. $f_2(x,y) = \dfrac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + \sqrt{8 - x^2.y^2}$, *avec* $k = 2$

Corrigé 0.2.1.2

1. *Pour* $k = -1$, $N_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = -1\}$. *Or l'équation* $y^2 = -1$ *n'a pas de solutions, donc la courbe de niveaux pour* $k = -1$ *est vide* $N_{-1} = \emptyset$.
   Pour $k = -1$, $N_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = 1\}$. *Or l'équation D'autre part, l'équation* $y^2 = 1$ *admet pour solution les droites* $y = 1$ *et* $y = -1$. *Donc la courbe de niveaux est la réunion des droites d'équations cartésienne* $y = 1$ *et* $y = -1$.
2. *Pour* $k = 2$, $N_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = 1\}$. *Or l'équation* $f(x,y) = 2$ *donne* $(x^2 + y^2)^2 = 16$, *ce qui, compte tenu du fait que* $x^2 + y^2 \geq 0$, *donne le cercle* $x^2 + y^2 = 4$, *cercle centré à l'origine et de rayon* 2.

0.2.2 Limites, continuités

Exercice 0.2.2.1
Soit $f\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$.
Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0 \tag{1}$$

et que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *n'existe pas.*

Corrigé 0.2.2.1
On a

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0 \quad et \quad \lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{x^2} = 0,$$

et il est clair, qu'en passant à la limite pour x tendant vers 0 dans la première et y tendant vers 0 dans la deuxième, on obtient l'égalité (1).

D'autre part, $f(x,x) = \dfrac{x^4}{x^4} = 1$ *d'où* $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 1$ *et* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *ne peut pas exister.*

Exercice 0.2.2.2

Étudier l'existence des limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}} \frac{x^2y}{x+y}$

   (considérer la direction $y = x^4 - x$) ;

2. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ 2x^3+yz^2\neq 0}} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$

3. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$

   (considérer la direction $x^2 = y^6 + y^2$ et une autre direction de votre choix).

4. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ (x,y,z)\neq(0,0,0)}} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$

Corrigé 0.2.2.2

1. *Pour $y = x^4 - x$, on obtient* $\dfrac{x^2y}{x+y} = x^2 - \frac{1}{x}$ *d'où* $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}} \frac{x^2y}{x+y}$ *n'existe pas.*

2. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x=y=z\neq 0}} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2} = \frac{2}{3}$ *et* $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x\neq 0, y=z=0}} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2} = 0$. *Il s'ensuit que* $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ 2x^3+yz^2\neq 0}} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$ *n'existe pas.*

3. *Sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, la fonction f définie par* $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2} = \frac{1}{|x|}$ *tend vers $+\infty$ quand x tend vers zéro d'où* $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$ *n'existe pas en tant que limite finie.*

4. *Le long de la demi-droite $x > 0, y = 0, z = 0$, la limite existe et vaut zéro et le long de la demi-droite $x = y = z > 0$ la limite existe et vaut $1/3$ d'où*

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ (x,y,z)\neq(0,0,0)}} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$$

   n'existe pas.

Exercice 0.2.2.3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Corrigé 0.2.2.3

On pose $x = y = t$, et on fait tendre t vers 0. On a alors $f(t,t) = \dfrac{1}{2}$.

En faisant tendre t vers 0, on voit que ceci tend vers $\dfrac{1}{2}$, qui n'est pas 0. La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 0.2.2.4

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *La fonction est-elle bornée ? Justifier.*

Corrigé 0.2.2.4

1. *Comme $x^2+y^2>0$ pour tout $(x,y)\neq(0,0)$, f est définie sur $\mathbb{R}^2$, et continue sur $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ comme quotient de deux fonctions continues $\mathbb{R}^2$ Si $x>0$, $f(x,x)=\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} = \sqrt{2}\neq 0$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$.*
   Notons qu'aucun prolongement par continuité en $(0,0)$ n'est possible car $\lim\limits_{x\to 0^-} = -\sqrt{2}\neq\sqrt{2}$
2. *On a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$*

$$\mid f(x,y)\mid = \frac{\mid x+y\mid}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\mid x\mid + \mid y\mid}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 2\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2$$

   et $f(0,0)=0$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 0.2.2.5

Soit f l'application de $A=\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\dfrac{3x^2+xy}{x^2+y^2}$.

1. *Montrer que si x et y sont des réels, on a $2\,|xy|\leq x^2+y^2$.*
2. *Montrer que, pour tout (x,y) de A, on a $|f(x,y)|\leq 4.\parallel (x,y)\parallel_2$,et $\parallel (x,y)\parallel_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.*
3. *En déduire que f admet une limite en $(0,0)$.*

Corrigé 0.2.2.5

1. *On a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\Big(|x|-|y|\Big)^2 = x^2+y^2-2\,|xy|$,*
   donc $2.\,|xy|\leq x^2+y^2$.
2. *On a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $x^2\leq\leq x^2+y^2$. Donc d'après l'inégalité triangulaire*

$$\left|3x^2+xy\right| \leq \left|3x^2\right| + |xy| \leq 3(x^2+y^2) + \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

   et donc $\left|3x^2+xy\right|\leq 4.(x^2+y^2)$, car $\dfrac{1}{2}\leq 1$, d'où

$$0 \leq f(x,y) \leq 4\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 4.\parallel (x,y)\parallel_2 .$$

3. *Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \parallel (x,y)\parallel_2 = 0$, on déduit, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.*

Exercice 0.2.2.6

Soi f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 + y^2 - 1, & si\,;\, x^2 + y^2 > 1 \\ -\dfrac{1}{2}x^2, & si\,;\, x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases},$$

1. *Donner D_f le domaine de définition de f.*
2. *Montrer que$f$ est continue sur D_f.*

Corrigé 0.2.2.6

1. *le domaine de définition de f est $D_f = D_1 \cup D_2$ où $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + y^2 > 1\}$ et $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + y^2 \geq 1\}$.*

   D_1 est l'extérieur du disque de centre $O(0,0)$ et de raton 1 sans sa frontière et D_2 est l'intérieur du disque de centre $O(0,0)$ et de raton 1 avec sa frontière (disque fermé), leur réunion est évidemment $\mathbb{R}^2$ et donc $D_f = \mathbb{R}^2$.

2. *Montrons la continuité de f sur D_f.*

   (a) *Il est évident que la fonction est continue sur D_1 et D_2 puisque sur ces deux domaines est une fonction polynôme.*

   (b) *Il reste à montrer la continuité sur la frontière. Soit alors (a,b) tel que $a^2 + b^2 = 1$. On a $b^2 = 1 - a^2$ donc*

   $$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ a^2+b^2>1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ a^2+b^2>1}} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 = \frac{1}{2}a^2 + b^2 - 1 = -\frac{1}{2}a^2,$$

   $$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ a^2+b^2<1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ a^2+b^2>1}} \frac{1}{2}a^2 + b^2 - 1 = -\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}a^2.$$

   Comme $f(a,b) = -\dfrac{1}{2}a^2$ alors

   $$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ a^2+b^2<1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ a^2+b^2>1}} f(x,y) = -\frac{1}{2}a^2 = f(a,b),$$

   f est continue pour tout (a,b) tel que $a^2 + b^2 = 1$.

   Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

0.2.3 Continuités et différentiabilités

Exercice 0.2.3.1

Posons $f(x,y) = xy\sin\big(\frac{1}{y}\big)$ *si* $y \neq 0$ *et* $f(x,0) = 0$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$.

1. *Établir que la fonction* f *est continue en tout point de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Montrer que* f *admet des dérivées partielles premières par rapport à* x *et par rapport à* y *en tout point* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$ *tel que* $y \neq 0$ *et en* $(0,0)$.
3. *Étudier la continuité des fonctions dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Corrigé 0.2.3.1

1. *Établir que la fonction* f *est continue en tout point de* $\mathbb{R}^2$.
   - *(*) Continuité sur* $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$ *où* $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$.
     Les fonctions $(x,y) \to xy$, $(x,y) \to \frac{1}{y}$ *sont continues sur* $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$ *comme fonction polynôme et fonction rationnelle et la fonction* $t \to \sin(t)$ *et continue sur* $\mathbb{R}$. *Donc* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$ *comme produit et composée de fonctions continues.*
   - *(*) Continuité sur* Δ.
     Soit $(a,0)$ *dans* Δ *avec* a *dans* $\mathbb{R}$. *On a pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\Delta$
     $$\Big|f(x,y) - f(a,0)\Big|\Big| = \Big|xy\sin(1/y)\Big| \leq \Big|xy\Big|,$$
     mais $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x\in\mathbb{R}}} \Big|xy\Big| = 0$, *donc* $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ a\in\mathbb{R}}} \Big|f(x,y) - f(a,0)\Big|\Big| = 0.$
     d'où la continuité en $(a,0)$. *Donc* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Montrer que* f *admet des dérivées partielles premières par rapport à* x *et par rapport à* y *en tout point* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$ *tel que* $y \neq 0$, *et en* $(0,0)$.
   - *(*) Pour* $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\Delta$
     $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\sin(1/y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\big(\sin(1/y) - \frac{1}{y}\cos(1/y)\big).$$
   - *(*) En* $(0,0)$ *on a* $\in \Delta$
     $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$ *car* $f(h,0) = f(0,0) = 0$
     $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$
3. *Il est clair que les fonctions* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *sont continues sur* $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$.
   Au point $(a,0)$ *on a*
   $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h,0) - f(a,0)}{h} = 0$ *car* $f(a+h,0) = f(0,0) = 0$. *Donc*
   $$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ a\in\mathbb{R}}} \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,0))\Big| = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ a\in\mathbb{R}}} \Big|y\sin(1/y)\Big| = 0,$$

d'où la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *en* $(a,0)$.

On a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(a,k)-f(a,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} a.\sin(\dfrac{1}{k})$.

Si $a \neq 0$ *cette limite n'existe pas. Si* $a=0$ *on a* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$. *Donc*

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0))\right| = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\Big(x\big(\sin(1/y) - \dfrac{1}{y}\cos(1/y)\big)\right|$.

Pour $x_n = y_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ *on a*

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0))\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\Big(\dfrac{1}{2n\pi}\big(\sin(2n\pi) - 2n\pi.\cos(2n\pi)\big)\right| = -1 \neq 0$

d'où la discontinuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *en* $(0,0)$.

Exercice 0.2.3.2

Posons $f(x,y) = y^2 \sin\big(\dfrac{x}{y}\big)$ *si* $y \neq 0$ *et* $f(x,0) = 0$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$.

1. *Établir que la fonction* f *est continue en tout point de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Étudier la continuité des fonctions dérivées partielles* $\partial f/\partial x$ *et* $\partial f/\partial y$.

Corrigé 0.2.3.2

1. *Établir que la fonction* f *est continue en tout point de* $\mathbb{R}^2$.
   - *(*) Continuité sur* $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$ *où* $\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y\neq 0\}$.
     Les fonctions $(x,y) \to y^2$, $(x,y) \to \dfrac{x}{y}$ *sont continues sur* $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$ *comme fonction polynôme et fonction rationNelle et la fonction* $t \to \sin(t)$ *et continue sur* $\mathbb{R}$. *Donc* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$ *comme produit et composée de fonctions continues.*
   - *(*) Continuité sur* Δ.
     Soit $(a,0)$ *dans* Δ *avec* a *dans* $\mathbb{R}$. *On a pour tout* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\Delta$
     $$\Big|f(x,y) - f(a,0)\Big|\Big| = \Big|y^2\sin(x/y)\Big| \leq \Big|y^2\Big|,$$
     mais $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x\in\mathbb{R}}} \Big|y^2\Big| = 0$, *donc* $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ a\in\mathbb{R}}} \Big|f(x,y)-f(a,0)\Big|\Big| = 0$.
     d'où la continuité en $(a,0)$. *Donc* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Dérivées partielles premières par rapport à* x *et par rapport à* y *en tout point* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$ *tel que* $y\neq 0$, *et en* $(a,0)$.
   - *(*) Pour* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\Delta$
     $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(x/y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\big(\sin(x/y) - x\cos(x/y)\big).$$
   - *(*) En* $(0,0)$ *on a* $\in\Delta$
     $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ *car* $f(h,0) = f(0,0) = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$

Il est clair que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sont continues sur* $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$.

Au point $(a,0)$ *on a*

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h,0)-f(a,0)}{h} = 0$ *car* $f(a+h,0) = f(0,0) = 0$. *Donc*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ a\in\mathbb{R}}} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,0))\right| = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ a\in\mathbb{R}}} \left|y\cos(x/y)\right| = 0,$$

d'où la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *en* $(a,0)$.

On a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(a,k)-f(a,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} a.\sin(\dfrac{1}{k})$.

Si $a = 0$ *on a* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$. *Donc*

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ a\in\mathbb{R}}} \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0))\right| = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ a\in\mathbb{R}}} \Big(2y\sin(x/y) - x\cos(x/y)\Big)$.

Pour $y = \dfrac{a}{2n\pi}$ *et* $a \neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, \dfrac{a}{2n\pi}) = -a$ *et*

$\lim\limits_{\substack{(x,n)\to(a,+\infty)\\ a\in\mathbb{R}}} \Big(2y\sin(x/y) - x\cos(x/y)\Big) = \lim\limits_{\substack{(x,n)\to(a,+\infty)\\ a\in\mathbb{R}}} \Big(\dfrac{2a}{2n\pi}\sin(2n\pi) - x\cos(2n\pi)\Big) = -a \neq \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0)$.

Exercice 0.2.3.3

Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$. *Est-ce que* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

Corrigé 0.2.3.3

Les fonctions polynômiales $(x,y) \to (x+y)^2$ *et* $(x,y) \to x^2+y^2$ *sont continues sur* $\mathbb{R}^2$ *et la fonction* $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ *est continue sur son domaine de définition* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Leur produit est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

La fonction est continue en point (x_0,y_0) *si la* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$. *Alors,* $f(0,0) = 0$, *et il faut comparer cette valeur à la* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$. *On ne la calcule pas pour toutes les valeurs* $(x,y) \to (0,0)$, *mais on remarque que par exemple,* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big|_{y=x} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x)^2}{x^2+x^2} = 2$, *ce qui implique que* f *n'est pas continue en* $(0,0)$.

Exercice 0.2.3.4
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

où p et q sont des entiers non nuls.

1. *Démontrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ réels, $|xy| \leq x^2 - xy + y^2$.*
2. *Pour quelles valeurs de p et q cette fonction est-elle continue ?*
3. *Montrer que si $p + q = 2$, alors f n'est pas différentiable.*

Corrigé 0.2.3.4

1. *On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\Big(|x| - |y|\Big)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy|$,*

   donc $2.|xy| \leq x^2 + y^2$. D'où $|xy| \leq x^2 + y^2$.
2. *La continuité sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est évidente comme fonction rationnelle de domaine de définition $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*

   Seule la continuité en $(0,0)$ pose problème. On a donc

$$|f(x,y)| \leq \frac{|xy|\left|x^{p-1}y^{q-1}\right|}{x^2 - xy + y^2) \leq |x^{p-1}y^{q-1}|}$$

   ▶ *si $p-1 = q-1 = 0$, c'est-à-dire, $p+q = 2$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.*

   ▶, *si $p-1 \neq 0$ et $q-1 \neq 0$ le dernier membre de l'inégalité tend vers 0, dans ce cas $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.*

   En conclusion Si $p+q = 2$, la fonction n'est pas continue.
3. *Si $p+q = 2$, la fonction f n'est pas continue donc elle ne peut pas être différentiable.*

Exercice 0.2.3.5
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{g(x) - g(y)}{x - y}, & si\ x \neq y \\ f(x,x) = g'(x) \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point de $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle.

Corrigé 0.2.3.5

En tout point (x_0, y_0) avec $x_0 \neq y_0$, f est continue et même de classe $\mathcal{C}^2$ car composée (projections sur les axes (Ox) et (Oy)), différence et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

Dans ces points, la différentielle de f est donnée par la matrice jacobienne

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0,y_0) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Big)\\ &= \Big(\frac{g'(x_0)(x_0-y_0)-(g(x_0)-g(y_0))}{(x_0-y_0)^2},\frac{-g'(y_0)(x_0-y_0)-(g(x_0)+g(y_0))}{(x_0-y_0)^2}\Big)\end{aligned}$$

qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ (g étant de classe $\mathcal{C}^2$, g' est de classe $\mathcal{C}^1$).

Montrons que F est continue aux points de la forme (a,a).

Le développement limité (DL) de g à l'ordre 2 entre x et y donne

$$g(y)=g(x)+(y-x)g'(c_{x,y})$$

avec $c_{x,y}\in[x,y]$ d'où

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)}\frac{g(x)-g(y)}{x-y}=\lim_{(x,y)\to(a,a)}g'(c_{x,y})=g'(a)=F(a,a)$$

car comme (x,y) tend vers (a,a), x et y tendent tous les deux vers a et donc $c_{x,y}$ aussi (et g' est continue).

Pour montrer que F est $\mathcal{C}^1$ (sachant que F est continue), il suffit de montrer que la différentielle de F se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

Le DL de g à l'ordre 2 entre x_0 et y_0 est

$$g(x_0)=g(y_0)+(x_0-y_0)g'(y_0)+\frac{(x_0-y_0)^2}{2}g''(c_1)\quad avec\quad c_1\in[x_0,y_0].$$

$$g(y_0)=g(x_0)+(y_0-x_0)g'(x_0)+\frac{(y_0-x_0)^2}{2}g''(c_2)\quad avec\quad c_2\in[y_0,x_0].$$

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{(x_0-y_0)^2g'')(c_1)}{2(x_0-y_0)^2}=\frac{g''(c_1)}{2},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{(x_0-y_0)^2g'')(c_2)}{2(x_0-y_0)^2}=\frac{g''(c_2)}{2}.$$

La fonction g étant de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)}Df(x_0,y_0)=\Big(\frac{g''(c_1)}{2},\frac{g''(c_2)}{2}\Big)$$

et donc Df se prolonge par continuité sur tout $\mathbb{R}^2$. F est donc bien de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 0.2.3.6

soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3(y-1)^2}{x^4+(y-1)^4}, & si \quad (x,y) \neq (0,1) \\ f(0,1) = 0 \end{cases}$$

1. *Donner D_f le domaine de définition.*
2. *Montrer que f est continue sur D_f.*
3. *Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout (x,y) de D_f.*
4. *Étudier la différentiabilité de f sur D_f.*

Corrigé 0.2.3.6

soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3(y-1)^2}{x^4+(y-1)^4}, & si \quad (x,y) \neq (0,1) \\ f(0,1) = 0 \end{cases}$$

1. *Le domaine de définition D_f est*
   $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/(x,y) \neq (0,1)\} \bigcup \{(0,1)\} = \mathbb{R}^2$
2. *Montrer que f est continue sur D_f.*
   (a) *Pour $(x,y) \neq (0,1)$ la fonction est une fonction rationnelle de domaine de définition $\mathbb{R}^2 - \{(0,1)\}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,1)\}$.*
   (b) *Pour $(x,y) = (0,1)$ on a $\mid f(x,y) - f(0,1) \mid = \mid \dfrac{x^3(y-1)^2}{x^4+(y-1)^4} \mid$.*
   On sait que $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ donc
   $\mid x^3(y-1)^2 \mid = \mid x^2(y-1)^2 \mid . \mid x \mid \leq \dfrac{1}{2}(x^4+(y-1)^4). \mid x \mid$ *et on a alors*
   $\mid f(x,y) - f(0,1) \mid \leq \mid x \mid$ *et* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \mid x \mid = 0$ *d'où la continuité de f $(0,1)$.*
3. *Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout (x,y) de D_f.*
   (a) *Pour $(x,y) \neq (0,1)$ faire les calculs.*
   (b) *Pour $(x,y) = (0,1)$ on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,1)-f(0,1)}{h} = 0$*
   et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,1+k)-f(0,1)}{k} = 0$
4. *Étudier la différentiabilité de f sur D_f.*
   (a) *Pour $(x,y) \neq (0,1)$ f est différentiable car les fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues pour tout $(x,y) \neq (0,1)$.*
   (b) *Pour $(x,y) = (0,1)$ on a*
   $\mid \dfrac{f(h,1+k) - f(0,1) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)h - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \mid = \mid \dfrac{h^3(k-1)^2}{(h^4+(k-1)^4)(\sqrt{h^2+k^2})} \mid$ *dont la limite, quand (h,k) tend vers $(0,0)$, n'est pas nulle. Ce qui prouve que la fonction n'est pas différentiable en $(0,1)$.*

Exercice 0.2.3.7

Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^4+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Soit D une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que la restriction de f à D est continue en $(0,0)$.*
2. *Peut-on en déduire que f est continue en $(0,0)$?*

Corrigé 0.2.3.7

1. *Une droite de $\mathbb{R}^2$ passant par l'origine a pour équation cartésienne $y = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, ou $x = 0$.*
   On a :
   (a) *si $y = \alpha x$, alors $f(x, \alpha x) = \dfrac{x^2 \alpha x}{\sqrt{x^4 + (\alpha x)^2}} \sim \alpha x$ et $\lim\limits_{x \to 0} \alpha x = 0$*
   (b) *si $x = 0$, alors $f(0,y) = 0$.*

   f est donc continue suivant ces deux directions.
2. *Peut-on en déduire que f est continue en $(0,0)$?*
   Pourtant, on va prouver que f n'est PAS continue en $(0,0)$, et c'est une erreur qu'il ne faut pas reproduire ! En effet, si on pose $y = x^2$, alors

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{\sqrt{x^4 + x^4}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

   qui ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0. Donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 0.2.3.8

Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.*

Corrigé 0.2.3.8

1. ▶ *Continuité en $(0,0)$.*
   On sait que pour tout (x,y), $y^2 \leq x^2 + y^2$, donc pour $(x,y) \neq (0,0)$
   $0 \leq f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq x^2$ *et* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$, *car tout polynôme sur $\mathbb{R}^2$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$. Donc $0 \leq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \leq 0$ d'où la continuité de f en $(0,0)$.*
   ▶ *Continuité sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.*
   La continuité sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ set évidente, étant donnée que f est une fonction rationnelle sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

2. *Un calcule classique des dérivées partielles nous donne*

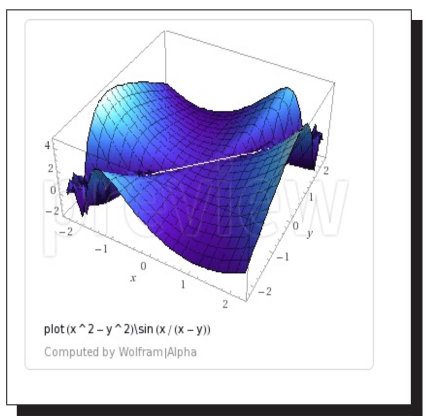
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y^2\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2\frac{2yx^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Exercice 0.2.3.9
soit f la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y)=\begin{cases} f_1(x,y)=(x^2-y^2)\sin\left(\dfrac{x}{x-y}\right), & si \quad x\neq y\\ f_2(x,y)=0, & si \quad x=y\end{cases}$$

1. *Donner D_f le domaine de définition de f et étudier la continuité de f au point (a,a) pour $a\in\mathbb{R}$.*
2. *Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x et y en tout point (x,y) pour $x\neq y$ de $\mathbb{R}^2$.*
3. *Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x et y en tout point (a,a) pour $a\in\mathbb{R}^*$.*
4. *Étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.*

Corrigé 0.2.3.9
Le graphe de la fonction est



1. ***Domaine de définition de f.***
On a $D_f=D_{f_1}\cup D_{f_2}=\mathbb{R}^2$. En effet $D_{f_1}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq y\}$ et $D_{f_2}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}$.
Continuité au point (a,a) pour $a\in\mathbb{R}$.
Au voisinage de (a,a) on a $\left|f(x,y)-f(a,a)\right|=\left|(x^2-y^2)\sin\left(\dfrac{x}{x-y}\right)\right|\leq\left|x^2-y^2\right|$, mais comme $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)}=0$ alors la fonction est continue en (a,a).
2. ***Calcul des dérivées partielles premières.***
Pour tout (x,y) tel que $x\neq y$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2x(x-y)\sin(x/(x-y))-y(x+y)\cos(x/(x-y))}{x-y}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2x(x-y)\sin(x/(x-y))+(x+y)\cos(x/(x-y))}{x-y}\end{cases}$$

3. *Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x et y en tout point (a,a) pour $a \in \mathbb{R}^*$.*

$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h,a)-f(a,a)}{h} & = & \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{((a+h)^2-a^2)\sin\big(\dfrac{a+h}{h}\big)}{h} \\ & = & \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(ah+h^2)\sin\big(\dfrac{a+h}{h}\big)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(a+h)\sin\big(\dfrac{a+h}{h}\big)\end{array},$$

cette limite n'existe pas donc f n'est pas dérivable par rapport à x au point $a(,a)$ pour $a \neq 0$.

$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(a,a+k)-f(a,a)}{k} & = & \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{(a^2-(a+k)^2)\sin\big(\dfrac{a}{k}\big)}{k} \\ & = & \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{(-ak-k^2)\sin\big(\dfrac{a}{k}\big)}{k} = \lim\limits_{k\to 0}(-a-k)\sin\big(\dfrac{a}{k}\big)\end{array},$$

de même cette limite n'existe pas donc f n'est pas dérivable par rapport à x au point $a(,a)$ pour $a \neq 0$.

4. ***Différentiabilité de f en** $(0,0)$.*

$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} & = & \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2\sin\big(\dfrac{h}{h}\big)}{h} \\ & = & \lim\limits_{h\to 0}(h)\sin(1) = 0\end{array},$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}(-k)\sin\big(\frac{0}{-k}\big) = 0 .$$

Donc f est différentiable en $(0,0)$ et de différentiel $df(0,0)=0$

0.2.4 Équations aux dérivées partielles

Exercice 0.2.4.1
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \to f(x,y)$.
et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par : $g(u,v,w) = \sin\big(f(v^2,u.w)-e^v\big)$.
Calculer les dérivées partielles premières de g au moyen de celles de f.

Corrigé 0.2.4.1

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \to f(x,y)$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g(u,v,w) = \sin\big(f(v^2,u.w)-e^v\big)$.

$$* \quad \begin{array}{rcl}\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v,w) & = & \big(f(v^2,u.w)-e^v\big)'_u\cos\big(f(v^2,u.w)-e^v\big) \\ & = & \big(w.\dfrac{\partial f}{\partial y}(v^2,u.w)\big)\cos\big(f(v^2,u.w)-e^v\big).\end{array}$$

$$* \quad \begin{array}{rcl}\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v,w) & = & \big(f(v^2,u.w)-e^v\big)'_v\cos\big(f(v^2,u.w)-e^v\big) \\ & = & \big(2v.\dfrac{\partial f}{\partial x}(v^2,u.w)-e^v\big)\cos\big(f(v^2,u.w)-e^v\big)\end{array}.$$

$$* \quad \begin{array}{rcl}\dfrac{\partial g}{\partial vw}(u,v,w) & = & \big(f(v^2,u.w)-e^v\big)'_w\cos\big(f(v^2,u.w)-e^v\big) \\ & = & \big(u.\dfrac{\partial f}{\partial y}(v^2,u.w)\big)\big)\cos\big(f(v^2,u.w)-e^v\big)\end{array}$$

Exercice 0.2.4.2

Soit f une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}^*)^2$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$(E):\ \frac{1}{x}.\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{1}{y}.\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Soit $f(x,y)=h(x^2+y^2)$ où h est une fonction d'une seule variable de classe $\mathcal{C}^1$.

1. *Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f en fonction de celles de h.*
2. *Donner une équation aux dérivées partielles $(E^{'})$ vérifiée par h.*
3. *Résoudre $(E^{'})$ puis déterminer toutes les fonctions f solutions de (E).*

Corrigé 0.2.4.2

1. *Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f en fonction de celles de h. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on pose $t=x^2+y^2$. On a*

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\Big(h(x^2+y^2)\Big)'_x=\big(x^2+y^2)\big)'_x.h'(t)=2.x.h'(t);$

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\Big(h(x^2+y^2)\Big)'_x=\big(x^2+y^2)\big)'_x.h'(t)=2y.h'(t);$

   (c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y)=\Big(2.x.h'(t))'_x=2\Big(h'(t)+2xh''(t)\Big);$

   (d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y)=\Big(2.y.h'(t))'_y=2\Big(h'(t)+2yh''(t)\Big);$

   (e) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y)=\Big(2.y.h'(t))'_x=2y\big(h'(t)\big)_x=4xyh''(t).$

2. *Donner une équation aux dérivées partielles $(E^{'})$ vérifiée par h. En remplaçant par les dérivées partielles, trouvées dans la première question, dans l'équation (E) on trouve (E') : $4h'(t)=\dfrac{h(t)}{t^2}$.*

3. *Résolution de $(E^{'})$ puis détermination toutes les fonctions f solutions de (E).*

   (a) $h(t)=0$ *est solution de $(E^{'})$.*

   (b) *Pour $h(t)\neq 0$ on a $4h'(t)=\dfrac{h(t)}{t^2}\Leftrightarrow\dfrac{h'(t)}{h(t)}=\dfrac{1}{4.t^2}$,*

   donc pour $k\in\mathbb{R}^*$,

$$\ln(|h(t)|=\frac{-1}{4t}+c\Leftrightarrow h(t)=\mp e^ce^{-1/t}=h(t)=k.e^{-1/4t},$$

   En combinant (a) et (b) on aura $h(t)=\alpha.e^{-1/4t}$ où $\alpha\in\mathbb{R}^*$.Donc

$$f(x,y)=\alpha.e^{-1/4(x^2+y^2)}\ \text{où}\ \alpha\in\mathbb{R}^*.$$

Exercice 0.2.4.3

Soit f une fonction numérique de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0. \tag{2}$$

On pose $u = xy$ et $v = x/y$ et $f(x,y) = g(u,v)$.

1. *Donner une équation aux dérivées partielles (E') vérifiée par g.*
2. *Résoudre (E') puis déterminer la fonction f solution de 2.*

Corrigé 0.2.4.3

1. *Donner une équation aux dérivées partielles (E') vérifiée par h.*
   $g(u,v) = f(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v})$ *h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et*

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}) - \frac{1}{2v}\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{4v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{4\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{4v\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2u}\frac{\partial g}{\partial v}.$$

   Donc l'équation aux dérivées partielles vérifiée par g est

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = \frac{1}{2u}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v).$$

2. *Résoudre(E') puis déterminer la fonction f solution de (E).*
   On a $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = \dfrac{1}{2u}\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \Leftrightarrow \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)(u,v) = \dfrac{1}{2u}\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v).$
   Si on pose $h(u) = \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ on obtiendra l'équation différentielle $h'(u) = \dfrac{1}{2u}h(u)$ dont la solution générale est $h(u) = c(v)\sqrt{u}$ où $v \to c(v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. par suite on a
   $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = c(v)\sqrt{u}$ *et par intégration de cette dernière équation différentielle on aura*

$$g(u,v) = \sqrt{u}F(v) + H(u)$$

   où F désigne une primitive de c et H est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
   Finalement la fonction $f(x,y) = F(x/y)\sqrt{xy} + H(xy)$, où F et H sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, est solution générale de 2. Inversement, on vérifie facilement que de telles fonctions sont bien solutions de l'équation 2.

0.2.5 Développements de Taylor et limités

Exercice 0.2.5.1

Donner le développement limité de d'ordre 2 en $(0,0)$ des fonctions suivantes

1. $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$,
2. $g(x,y) = \dfrac{e^{\cos(x+y)}}{2+y}$.

Corrigé 0.2.5.1

On utilise les les dévellopements limités usuelles au voisinage de 0 suivantes
$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + o(z^2)$, *et* $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + o(z^2)$.

1. *On a au voisinage de* 0, $\dfrac{1}{1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)} = 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, *donc*

$$f(x,y) = \frac{\cos x}{\cos y} = (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))(1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2)) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + o(x^2 + y^2).$$

2. *On a au voisinage de* 0, $\cos(x+y) = 1 - \dfrac{(x+y)^2}{2} + o(x^2+y^2)$, *donc*

$$e^{\cos(x+y)} = e^1\big(e^{(-\frac{(x+y)^2}{2} + o(x^2+y^2))}\big) = e(1 - \frac{1}{2}(x+y)^2 + o(x^2+y^2)).$$

De plus $\dfrac{1}{2+y} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1+y/2} = \dfrac{1}{2}\big(1 - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4}\big) + o(y^2)$. *D'où*

$$\begin{aligned} g(x,y) = \frac{e^{\cos(x+y)}}{2+y} &= \frac{e}{2}\left(1 - \frac{1}{2}(x+y)^2 + o(x^2+y^2)\right)\left(1 - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + o(y^2)\right) \\ &= \frac{e}{2}\left(1 - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2}(x+y)^2\right) + o(x^2+y^2) \\ &= \frac{e}{2}\left(1 - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} - xy\right) + o(x^2+y^2) \end{aligned}$$

Exercice 0.2.5.2

Soit la paraboloïde d'équation cartésienne $z = 4x^2 + y^2$ *et les plans* (P_1) *et* (P_2) *d'équations respectives*

$$(P_1): \ x + 2y + z = 6 \quad et \quad (P_2): \ 3x + 5y - 2z = 3.$$

1. *Trouver les points sur le paraboloïde où le plan tangent est parallèle au plan* (P_1).
2. *Trouver les points sur le paraboloïde où le plan tangent est parallèle au plan* (P_2).

Corrigé 0.2.5.2

1. *En général le plan tangent à la surface d'équation* $z = 4x^2 + y^2$ *au point* (x_0, y_0, z_0) *est donné par l'équation*

$$\begin{aligned} z &= z_0 + 8x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) \\ &= 8x_0x + 2y_0y + z_0 - 8x_0^2 - 2y_0^2 = 8x_0x + 2y_0y - z_0 \end{aligned}$$

d'où par

$$z - 8x_0x - 2y_0y = z_0 \tag{3}$$

.

Pour que ce plan (3) soit parallèle au plan (P_1) *d'équation* $x + 2y + z = 6$ *il faut et il suffit que* $(1,2) = (-8x_0, -2y_0)$ *d'où que* $x_0 = \dfrac{-1}{8}$ *et* $y_0 = -1$.

Par conséquent, le point cherché sur la paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ *est le point* $(\frac{-1}{8}, -1, \frac{17}{16})$.

2. *De même, pour que le plan (3) soit parallèle au plan d'équation* $3x + 5y - 2z = 3$ *il faut et il suffit que* $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) = (-8x_0, -2y_0)$ *d'où que* $x_0 = -\frac{3}{16}$ *et* $y_0 = -\frac{5}{4}$*, et le point cherché sur la paraboloïde* $z = 4x^2 + y^2$ *est alors le point* $(-\frac{3}{16}, -\frac{5}{4}, \frac{109}{64})$.

0.2.6 Théorème des fonctions implicites

Exercice 0.2.6.1
Soit l'équation définie sur $\mathbb{R}^2$ *par*

$$(E): \quad x.\ln\left(1+y^2\right) - ye^x = 0$$

1. *Donner le développement limité à l'ordre 2 de* f *en* $(1, 0)$.
2. *Soit l'équation* $x.\ln\left(1+y^2\right) - ye^x = 0$.
   (a) *Montrer que l'équation (E) définit implicitement* $y = \phi(x)$ *en fonction de* x *au voisinage de* $(1, 0)$.
   (b) *Calculer* $\phi'(x)$ *au voisinage de* 1.

Corrigé 0.2.6.1
Soit l'équation définie sur $\mathbb{R}^2$ *par*

$$(E): \quad x.\ln\left(1+y^2\right) - ye^x = 0.$$

1. *Développement limité à l'ordre 2 de* f *en* $(1, 0)$.
   Le développement limité à l'ordre 2 en $(1, 0)$ *de* $(x, y) \to \ln\left(1+y^2\right)$ *est*
   $$\ln\left(1+y^2\right) = y^2 + o(x^2 + y^2),$$
   et le développement limité à l'ordre 2 en $(1, 0)$ *de* $(x, y) \to e^x$ *est*
   $$e^x = e.e^{x-1} = e\big(1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + o(x^2+y^2)\big).$$
   Comme
   $$x\ln\left(1+y^2\right) = (x-1)\ln\left(1+y^2\right) + x\ln\left(1+y^2\right),$$
   et en faisant le produit et ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 *en* $(x-1)$ *et* y *on obtiendra les développements limités à l'ordre* 2 *en* $(1, 0)$ *de* $(x, y) \to \ln\left(1+y^2\right)$ *et* $(x, y) \to ye^x$ *sont* $\ln\left(1+y^2\right) = y^2 + o(x^2+y^2)$,
   et $ye^x = ey + ey(x-1) + o(x^2+y^2)$.
   Donc le développement limité à l'ordre 2 *de* f *en* $(1, 0)$ *est*
   $$f(x, y) = ey + ey(x-1) + y^2 + o(x^2+y^2).$$
2. *Soit l'équation* $x.\ln\left(1+y^2\right) - ye^x = 0$.

(a) *Existante de la fonction implicite* $y = \phi(x)$ *en fonction de* x *au voisinage de* $(1, 0)$.
On a $\dfrac{\partial f}{\partial}(x, y) = \dfrac{2xy}{1+y^2} - e^x$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial}(1, 0) = -e \neq 0$, *donc d'après le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage* V_1 *de* 1, *un voisinage* V_0 *de* 0 *et et une fonction*

$$\begin{cases} \phi : V_1 \to V_0 \\ \quad x \to y = \phi(x) \end{cases}$$

tels que

* $\phi(1) = 0$,
* $\forall x \in V_1 : f(x, \phi(x)) = 0$

(b) *Calcul de* $\phi'(x)$ *au voisinage de* 1. *Comme* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \ln(1 + y^2) - ye^x$, *alors*

$$\forall x \in V_1; \quad \phi'(x) = -\frac{\ln\big(1 + \phi(x)^2\big) - \phi(x)e^x}{\big(2x.\phi(x)\big)/(1 + \phi(x)^2) - e^x}.$$

Exercice 0.2.6.2
Soit la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - e^{2\arctan(y/x)}$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

1. *Montrer que l'équation* $f(x, y) = 0$ *définit, au voisinage de* $x = 1$, *une fonction implicite* $y = \phi(x)$.
2. *Calculer la dérivée de* ϕ.
3. *Donner le développement limité à l'ordre de* 3 *de* ϕ *en* 1.

Corrigé 0.2.6.2

1. *La fonction* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *comme produit et composé de fonctions de classe* $\mathcal{C}^\infty$, *avec* $f(1, 0) = 0$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + \Big(2\arctan(y/x)\Big)'_y e^{2\arctan(y/x)} \\ &= \qquad 2y - \frac{2x}{x^2 + y^2} e^{2\arctan(y/x)} \end{aligned} ;$$

et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = -2$.
Donc il existe un voisinage V_1 *de* 1, *un voisinage* V_O *de* 0 *et une fonction* ϕ *de* V_1 *à* V_0 *tels que*

$$\begin{cases} \phi : V_1 \to V_0 \\ \quad , x \to y = \phi(x); \end{cases}$$

et

$$\forall x \in V_1, f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x) \Leftrightarrow x^2 + (\phi(x))^2 = e^{2\arctan(\phi(x)/x)}. \tag{4}$$

2. *Dérivée de* ϕ.

$$\forall x \in V_1,\ \phi(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))},$$

Or $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\Big(x + \dfrac{y}{x^2+y^2}e^{2\arctan(y/x)}\Big)$ *et*
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\Big(y - \dfrac{x}{x^2+y^2}e^{2\arctan(y/x)}\Big)$.
Donc

$$\forall x \in V_1, \quad \phi'(x) = -\frac{x + \dfrac{y}{x^2+y^2}e^{2\arctan(y/x)}}{y - \dfrac{x}{x^2+y^2}e^{2\arctan(y/x)}}.$$

3. *En dérivant* 3 *fois la relation (4) on obtient*

$$x + \phi(x)\phi^{'}(x) - \frac{x\phi^{'}(x) - \phi(x)}{x^2}\frac{x^2}{x^2+(\phi(x))^2}e^{2\arctan(\phi(x)/x)} = 0,$$

soit

$$x + \phi(x)\phi^{'}(x) - x\phi^{'}(x) + \phi(x) = 0, \tag{5}$$

car $e^{2\arctan(\phi(x)/x)} = x^2 + \phi^2(x)$.

les dérivées de la relation (4) donnent le système

$$\begin{cases} x + \phi(x)\phi^{'}(x) - x\phi^{'}(x) + \phi(x) = 0 \\ 1 + \big(\phi(x)\big)^2(x) + \phi(x).\phi^{''}(x) - x\phi^{''}(x) = 0 \\ 3\phi^{'}\phi^{''}(x) + \phi(x).\phi^{'''}(x) - x\phi^{'''}(x) - \phi^{''}(x) = 0 \end{cases}$$

Dans la première équation on obtient $\phi(1) = 0$ *et* $\phi^{'}(1) = 1$, *puis dans la deuxième,* $\phi^{''}(1) = 2$, *puis dans la troisième,* $6 - \phi^{'''}(1) - 2 = 0$, *soit* $\phi^{'''}(1) = 4$.

Le développement limité à l'ordre 3 *est donc*

$$\phi(x) = \phi(1) + \phi'(1).(x-1) + \frac{1}{2}\phi''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3),$$

soit

$$\phi(x) = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

Exercice 0.2.6.3

Soit le système $(S) : \begin{cases} x^2 - y^2 - zt = 0 \\ xy + z^2 - t^2 \end{cases}$

1. *Montrer qu'il existe un voisinage* U *de* $(0,1)$ *et un voisinage* V *de* $(1,1)$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *tel le système* S *définisse une fonction* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ $(x,y) \to (s,t)$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *de* U *dans* V *tel que*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - \varphi_1(x,y).\varphi_2(x,y) = 0 \\ xy + \big[\varphi_1(x,y)\big]^2 - \big[\varphi_2(x,y)\big]^2 \end{cases}$$

2. *Déterminer la matrice jacobienne* $J(\varphi(x,y))$ *de* φ *au point* (x,y) *de* U.

Corrigé 0.2.6.3

1. *Posons* $f(x,y,z,t) = (f_1(x,y,z,t), f_2(x,y,z,t)) = (x^2-y^2-zt, xy+z^2-t^2)$. *On a* $f(0,1,1,1) = 0$ *et le jacobien*

$$\frac{D(f_1,f_2)}{D(z,t)}(x,y,z,t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z,t) & \frac{\partial f_1}{\partial t}(x,y,z,t) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z,t) & \frac{\partial f_2}{\partial t}(x,y,z,t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & z \\ 2z & -2t \end{vmatrix}.$$

Donc $\dfrac{D(f_1,f_2)}{D(z,t)}(0,1,1,1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$
Comme le déterminant et non nulle on peut appliquer le théorème des fonctions implicites et obtenir un voisinage U *de* $(0,1)$ *et un voisinage* V *de* $(1,1)$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *tels que, sur ces voisinages, les variables* z *et* t*, liées à* (x,y) *par l'équation* $f(x,y,z,t) = 0$*, s'expriment comme une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *des variables* x *et* y*. Donc il existe un fonction* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : (x,y) \to (s,t)$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *de* U *dans* V *telle que*

   (a) $\forall (x,y,z,t) \in U \times V, \quad f(x,y,z,t) = 0 \Leftrightarrow (z,t) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)),$

   (b) $\forall (x,y,z,t) \in U \times V, \quad \dfrac{D(f_1,f_2)}{D(z,t)}(x,y,z,t) \neq 0.$

2. *Le jacobien de* φ *est* $J(\varphi(x,y)) = -Q^{-1}.P$ *où*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z,t) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z,t) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z,t) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z,t) \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z,t) & \frac{\partial f_1}{\partial t}(x,y,z,t) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z,t) & \frac{\partial f_2}{\partial t}(x,y,z,t) \end{pmatrix}.$$

Un calcul donne $P = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$ *et* $Q = \begin{pmatrix} t & z \\ 2z & -2t \end{pmatrix}$ *et* $Q^{-1} = -\dfrac{1}{-2t^2-2z^2}.\begin{pmatrix} -2z & -z \\ -2z & t \end{pmatrix}$.
D'où

$$J(\varphi(x,y)) = -Q^{-1}.P = \frac{1}{2(t^2+z^2)}.\begin{pmatrix} -4xt-yz & -4yt-xz \\ -4xz+yt & 4yz+xt \end{pmatrix}.$$

0.2.7 Éxtrémums libres et éxtrémums liés

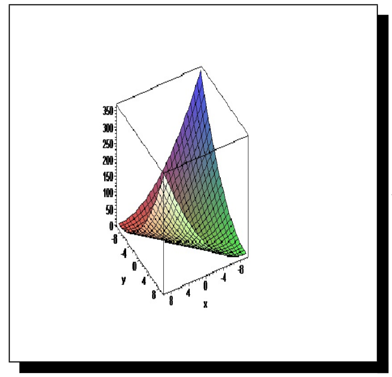
Exercice 0.2.7.1

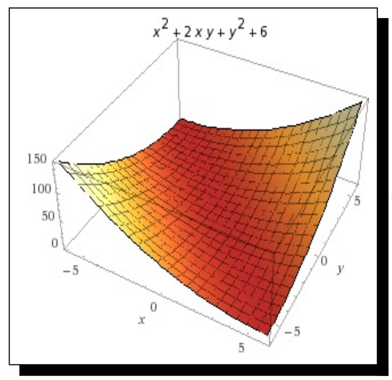
Pour chacune des fonctions suivantes étudier la nature du point critique donné

1. $f(x;y) = x^2 - xy + y^2$ *au point critique* $(0,0)$;
2. $f(x;y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ *au point critique* $(0,0)$;
3. $f(x;y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ *au point critique* $(0,0)$.

Corrigé 0.2.7.1

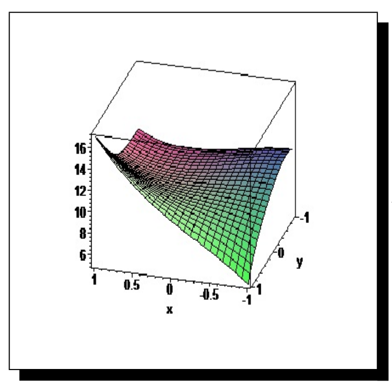
1. (a) ***Point critiques***. *On a* $df = (2x-y)dx + (2y-x)dy = 0$ *donc*
$$df = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$
   (b) ***Nature du point*** $(0,0)$. *La matrice Héssienne est*
$$\mathcal{H}_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Comme le déterminant de la matrice Héssienne $det\mathcal{H}_f = 5 > 0$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$. *Le point* $(0,0)$ *présente donc un minimum local.*





2. *On a* $df(x,y) = (2x+2y)dx + (2x+2y)dy$ *donc* $df(x,y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$.
   Les points critiques sont de la forme $(a,-a)$
   $f(x,y) - f(a,-a) = (x+y)^2 - (a-a)^2 = (x+y)^2 \geq 0$ *d'où le point* $(a,-a)$ *présente un minimum local.*

3. (a) *Point critiques.*
   On a $df = (3x^2 + 2x + 2y^2 + 3y)dx + (4xy - 4y^3 + 3x + 2y)dy = 0$ *doc*
$$df = \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x + 2y^2 + 3y = 0 \\ 4xy - 4y^3 + 3x + 2y = 0 \end{cases}$$
   Il est claire que $(0,0)$ *est un point critique.*
   (b) *Nature du point* $(0,0)$.
   La matrice Héssienne est
$$\mathcal{H}_f = \begin{pmatrix} 6x+2 & 4y+3 \\ 4y+3 & -12y^2 + 4x + 2 \end{pmatrix}$$
   Comme le déterminant de la matrice Héssienne au point $(0,0)$
   $det\mathcal{H}_f = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 < 0$ *le point* $(0,0)$ *présente donc un point selle.*



Exercice 0.2.7.2
Déterminer les points stationnaires et leurs natures dans les cas suivants

1. $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + y^2$,
2. $f(x, y) = -x^2 + x - xy + y - y^2$,
3. $f(x, y) = x^2 - 2xy + y - y^2$,
4. $f(x, y, z) = x^2 + 2x + y^2 - 3y + 2z^2$,
5. $f(x, y, z) = x^2 - 4x + xy - y^2 - xz + z^2$.

Corrigé 0.2.7.2

1. *Les conditions d'extremum du premier degré* $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + y^2$ *sont réalisés aux points solutions du système (points stationnaires)*

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 2y == 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Donc $x = 0$ *et* $y = 0$, *seul le point* $(0, 0)$ *peut être un extremum. pour* f.
Nature de l'extremum.
On a $\begin{cases} f''_{x^2}(0, 0) = 8 \\ f''_{y^2}(0, 0) = 2 \\ f''_{xy}(0, 0) = 2 \end{cases}$
Donc, comme

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2}(0, 0) & f''_{xy}(0, 0) \\ f''_{xy}(0, 0) & f''_{y^2}(0, 0) \end{vmatrix} = 12 > 0 \quad et \quad f''_{x^2}(0, 0) = 8 > 0,$$

est minimum local en $(0, 0)$ *et ce minimum est* $f(0, 0) = 0$.

2. *Les conditions d'extremum du premier degré* $f(x, y) = -x^2 + x - xy + y - y^2$ *sont réalisés aux points solutions du système (points stationnaires)*

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 1 - y = 0 \\ -x + 1 - 2y = 0 \end{cases}$$

Donc $x = \frac{1}{3}$ *et* $y = \frac{1}{3}$, *seul le point* $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ *peut être un extremum local pour* f.
Nature de l'extremum.
On a :

$$\begin{cases} f''_{x^2}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -2 \\ f''_{y^2}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -2 \\ f''_{xy}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -1 \end{cases}$$

Donc, comme $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ *et* $f''_{x^2}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -2 < 0$, $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ *est maximum local de* f *en* $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

3. *Les conditions d'extremum du premier degré* $f(x, y) = x^2 - 2xy + y - y^2$ *sont réalisés aux points solutions du système (points stationnaires)*

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 1 - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Donc $x = \frac{1}{4}$ *et* $y = \frac{1}{4}$*, seul le point* $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ *peut être un extremum local pour* f*.*

Nature de l'extremum.

On a

$$\begin{cases} f''_{x^2}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = 2 \\ f''_{y^2}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = -2 \\ f''_{xy}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = -2 \end{cases}$$

Donc, comme $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0$*, alors* $f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$ *n'est pas un extremum et le point* $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ *est un point selle pour la surface.* $f(0,1) = 0 < \frac{1}{8}$ *et* $f(1,0) = 1 > \frac{1}{8}$*.*

4. *Les conditions d'extremum du premier degré* $f(x,y,z) = x^2 + 2x + y^2 - 3y + 2z^2$ *sont réalisées aux points solutions du système (points stationnaires)*

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ 2y - 3 = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$$

Donc $x = -1$*,* $y = \frac{3}{2}$ *et* $z = 0$ *seul le point* $(-1, \frac{3}{2}, 0)$ *peut être un extremum. pour* f*.*

Nature de l'extremum.

On a $\begin{cases} f''_{x^2}(-1, \frac{3}{2}, 0) = 2 \\ f''_{y^2}(-1, \frac{3}{2}, 0) = 2 \\ f''_{z^2}(-1, \frac{3}{2}, 0) = 4 \\ f''_{xy}(-1, \frac{3}{2}, 0) = f''_{xz}(-1, \frac{3}{2}, 0) = f''_{yz}(-1, \frac{3}{2}, 0) = 0 \end{cases}$

Donc, comme $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 > 0$*, alors* $f(-1, \frac{3}{2}, 0) = -\frac{13}{4}$ *est un minimum pour la fonction* f*.*

Autre méthode

Application de la formule de Taylor

On a $f(-1+h, \frac{3}{2}+k, l) - f(-1, \frac{3}{2}, 0) = \frac{1}{2}[h^2 f''_{x^2} + k^2 f''_{x^2} + l^2 f''_{x^2} + 2hk^2 f''_{xy} + 2hl^2 f''_{xz} + 2lk^2 f''_{yz}]$*.*

Donc $f(-1+h, \frac{3}{2}+k, l) - f(-1, \frac{3}{2}, 0) = h^2 + k^2 + l^2 \geq$*, pour tout* h*,* k *et* l*. D'où le résultat.*

5. *Les conditions d'extremum du premier degré de* $f(x,y,z) = -x^2 + 2x + 3y + y^2 - z^2$ *sont réalisés aux points solutions du système (points stationnaires) :*

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2 = 0 \\ -2y + 3 = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

Donc $x = 1$*,* $y = \frac{3}{2}$ *et* $z = 0$ *, seul le point* $(1, \frac{1}{2}, 0)$ *peut être un extremum pour* f*.*

Nature de l'extremum.

On a

$$\begin{cases} f''_{x^2}(-1,\dfrac{3}{2},0) = -2 \\ f''_{y^2}(-1,\dfrac{3}{2},0) = -2 \\ f''_{z^2}(-1,\dfrac{3}{2},0) = -2 \\ f''_{xy} = f''_{xz} = f''_{yz} = 0 \end{cases}$$

Donc, comme $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ *et* $f''_{x^2}(-1,\frac{3}{2},0) = -2 < 0$ *et alors* $f(-1,\frac{3}{2},0) = \frac{13}{4}$ *est un maximum pour la fonction* f.

Autre méthode

On peut application de la formule de Taylor, on trouve alors

$f(-1+h,\frac{3}{2}+k,l) - f(-1,\frac{3}{2},0) = -(h^2+k^2+l^2) \leq 0$, *pour tout* h, k *et* l.

6. *Les conditions d'extremum du premier degré de* $f(x,y,z) = x^2 - 4x + xy - y^2 - xz + z^2$ *sont réalisés aux points solutions du système (points stationnaires)* $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ -2y + x = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases}$

   Donc $x = 2$, $y = 1$ *et* $z = 1$, *seul le point* $(2,1,1)$ *peut être un extremum pour* f.

   Nature de l'extremum.

   On a $\begin{cases} f''_{x^2}(2,1,1) = 2 \\ f''_{y^2}(2,1,1) = -2 \\ f''_{z^2}(2,1,1) = 2 \end{cases}$ *et* $\begin{cases} f''_{xy}(2,1,1) = 1 \\ f''_{xz}(2,1,1) = -1 \\ f''_{yz}(2,1,1) = 0 \end{cases}$

   Donc, comme $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 > 0$ *alors* $f(2,1,1) = \frac{13}{4}$ *n'est pas un extrmum pour la fonction* f.

   Et donc le point $(2,1,1,14)$ *est un point selle.*

   Autre méthode

   On peut application de la formule de Taylor, on trouve alors

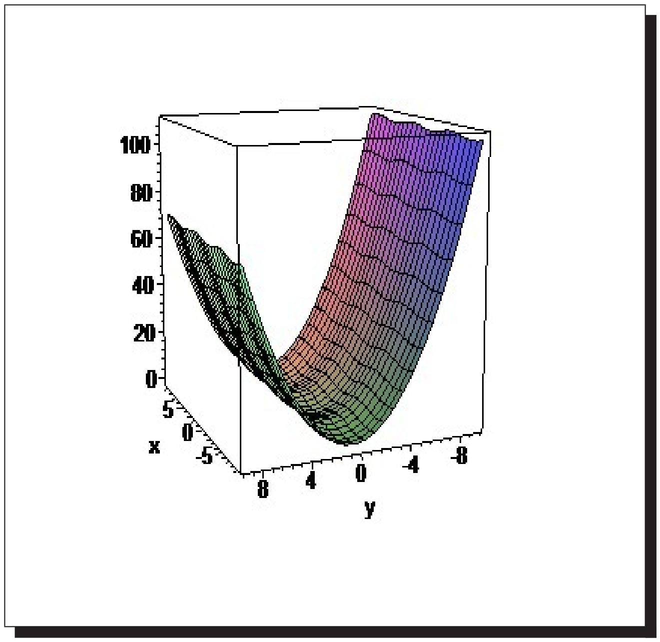
   $f(2+h,1+k,1+l) - f(2,1,1) = (h+0.5k-0.5l)^2 - 0.8(-1.25k+.25l)^2 + 0.8l^2) \leq 0$, *qui change de signe pour tout* h, k *et* l.

Exercice 0.2.7.3

Trouver les points critiques de la fonction f *suivante et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.*

$$f(x,y) = \sin(x) + y^2 - 2y + 1.$$

Corrigé 0.2.7.3



1. *Points critiques.*

$$df = cos(x)dx + (2y-2)dy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} cos(x) = 0 \\ 2y-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = ((2k+1)\frac{\pi}{2}, 1),$$

les points critiques critiques sont donc $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 1)$.

2. *Nature des points critiques. La matrice Héssienne est*

$$\mathcal{H}_f = \begin{pmatrix} -\sin(x) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice Héssienne au point $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 1)$ *est*

$$det\mathcal{H}_f = \begin{vmatrix} -\sin(x) & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}_{((2k+1)\frac{\pi}{2},1)} = -2\sin(x)\Big|_{((2k+1)\frac{\pi}{2},1)} = 2(-1)^{k+1}.$$

Par conséquent, si k *est impaire impaire, le point* $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 1)$ *présente un minimum local et, si* k *est paire, le point* $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 1)$ *présente un point selle.*

Exercice 0.2.7.4

On considère la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x,y) = (1+x+xy+y^2)e^x - 2x - 1$.

1. *Montrer que le point $O(0,0)$ est un point stationnaire de f. La fonction f admet-elle un extremum relatif en $O(0,0)$?*
2. *Soit S la surface définie par l'équation $z = h(x,y)$ où $h(x,y) = (1+x+xy+y^2)e^x$.*
   (a) *Donner une équation cartésienne du plan tangent à S au point $M_0(0,0,1)$.*
   (b) *Quelle est la position locale de S par par rapport à son plan tangent en $M_0(0,0,1)$*

Corrigé 0.2.7.4

1. *Le point $O(0,0)$ est un point stationnaire de f si ses coordonnées sont solution du système*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = (2+x+xy+y^2)e^x - 2 = & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = (x2+y)e^x & = 0. \end{cases}$$

Le point $O(0,0)$ vérifie effectivement ce système, c'est donc un point stationnaire.
Pour déterminer la nature du point $O(0,0)$, on cherche les dérivées partielles secondes de f en ce point. On obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (3+x+2y+xy+y^2)e^x = & = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^x & = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1+x+2y)e^x & = 0. \end{cases}$$

Donc la matrice Hessienne de f en $O(0,0)$ est

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et son déterminant est
$det H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0$
et comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0$, *il s'agit d'un minimum relatif en $O(0,0)$.*

(a) *S est la surface d'équation cartésienne $z - h(x,y) = 0$, donc le plan tangent à S au point $M_0(0,0,1)$ admet l'équation*

$$(\Pi) \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial h}{\partial y}(0,0)y + (z-1) = 0.$$

Donc $z = 2x + 1$.

(b) *La position locale de S par par rapport à son plan tangent Π en $M_0(0,0,1)$ est donné par le signe de $f(x,y) = h(x,y) - (2x+1) = 0$.*
D'après la première question $f(x,y) \geq 0$, donc S est au dessus du plan Π pour (x,y,z) proche de $M_0(0,0,1)$.

Exercice 0.2.7.5

Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x} \end{cases}$$

1. *Établir que l'équation* $e^{-x} = x$ *d'inconnue* $x \in \mathbb{R}$*, admet une solution et une seule.*
2. *Montrer qu'il existe* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *unique tel que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0. \end{cases}$$

   et établir que $e^{-a} = a$ *et* $b = \dfrac{a}{2}$
3. *Montrer que* f *admet un extremum en* (a,b)*. Est-ce un minimum ou un maximum ?*

Corrigé 0.2.7.5

1. *Étudions la fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = e^{-x} - x$*.*

   On a $\forall x \in \mathbb{R}$ *;* $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$*.*

   La fonction g *est donc strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$*. De plus*

   $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} - x = +\infty,$

   et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x(\dfrac{1}{xe^x} - 1) = -\infty,$

   car $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$*.*

   La fonction g *est continue et strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$ *: elle réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$*. Or* $0 \in \mathbb{R}$*, donc l'équation* $g(x) = 0$ *a une unique solution dans* $\mathbb{R}$*.*

   Et donc l'équation $e^{-x} = x$*a une unique solution dans* $\mathbb{R}$*.*

2. *On a pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - e^{-x} = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

   La deuxième égalité implique que $b = \dfrac{a}{2}$*. En remplaçant la première équation on obtient* $e^{-a} = a$*.*

   La première équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ *d'après la question précédente. Connaissant la valeur* a *solution de cette équation, on en déduit* b*. Il existe donc un unique point critique.*

3. *La fonction* f *étant de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *comme somme de produits de fonctions de classe* $\mathcal{C}^2$*, on peut appliquer le théorème de Schwarz.*

La matrices Hésienne est

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + e^{-x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2. \end{cases}$$

et son determinant au point (a, b)

$$det\mathcal{H}_f = \begin{vmatrix} 2 + e^{-x} & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}_{((2k+1)\frac{\pi}{2},1)} = -2\sin(x)\Big|_{(a,b)} = 4 + 2e^{-a} > 0.$$

Donc le point critique est un extremum local.

De plus $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 > 0$, *ainsi* f *admet un minimum local au point* (a, b) *et ce minimum est*

$$f(a, b) = a^2 - 2ab + 2b^2 + e^{-a} = \frac{1}{2}a^2 + e^{-a}.$$

Exercice 0.2.7.6

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$ *par* $f(x, y) = xy\ln(x^2 + y^2)$.

1. *Déterminer les points stationnaires de* f.
2. *Donner la nature des points trouvés en* 1.

Corrigé 0.2.7.6

1. *Les points stationnaires de* f.

   On cherche les points solutions du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\ln(x^2 + y^2) + \dfrac{2x^2 y}{x^2 + y^2} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\ln(x^2 + y^2) + \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

   Ce système donne comme solution les points : $\big(0, \mp 1\big)$, $\big(\mp 1, 0\big)$, $\big(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{-1}{\sqrt{2e}}\big)$, *et* $\big(\frac{-1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\big)$,

2. *Nature des points trouvés en* 1.

   Les dérivées secondes sont

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \dfrac{2xy(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \ x^2 + y^2 \neq 0, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \dfrac{2xy(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \ \ x^2 + y^2 \neq 0, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + \dfrac{2x^4 + y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

   Le determinant de la matrice Hessienne $\mathcal{H}_f(x, y)$ *en* (x, y) *est :*

$$det\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{2xy(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} \\ \ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{2xy(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{vmatrix}$$

Donc

$$det\mathcal{H}_f(x,y) = \frac{2xy(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} . \frac{2xy(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} - \Big(\ln(x^2+y^2) + \frac{2(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}\Big)^2.$$

Pour les points $(x_0, y_0) \in \{(0, \mp 1), (\mp 1, 0)\}$ *le determinant* $det\mathcal{H}_f(x_0, y_0) = -4 < 0$, *donc ces points représentent des points selles (Sadle point).*

Pour les points $(x_1, y_1) \in \{(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{-1}{\sqrt{2e}}), (\frac{-1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})\}$ *le determinant* $det\mathcal{H}_f(x_1, y_1) = 4 > 0$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, y_1) = -2 < 0$, *ainsi en ces points* f *représente un maximum local et ce maximum est* $f(x_1, y_1) = -\frac{1}{2e}$.

Exercice 0.2.7.7

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. *Déterminer les extremums relatifs (locaux) de la fonction* f.
2. *La fonction* f *possède-t-elle des extremum absolus sur* $\mathbb{R}^2$?
3. *Représenter le segment de droite* L *défini par*

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -2 \leq x \leq 0, \ y = x+1\}.$$

Déterminer les extremums absolus de la restriction de f *à* L *et préciser en quels points de* L *ils sont atteints.*

Corrigé 0.2.7.7

1. *On cherche les points critiques de* $f(x,y)$, *les solutions du système*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 6y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6x - 6y = 0 \end{cases}$$

De la deuxième équation on trouve que $y = x$.

On a $6x^2 + 6x = 0 \Longleftrightarrow x(x+1) = 0$. *Alors les points critiques sont :* $(0,0)$ *et* $(-1,-1)$.

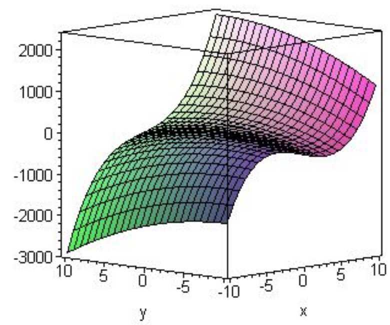
$$R(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x, \quad T(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6, \quad S(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6.$$

En $(0,0) : R = 0, RT - S^2 = -36 < 0$, *il n'y a pas d'extremum en* $(0,0)$ *c'est un point côl.*

En $(-1,-1) : R = -12, RT - S^2 = (-12).(-6) - 36 = 36 > 0$, *et* R *et* T *sont négatifs. Il y a un maximum local en* $(-1,-1)$: $f(-1,-1) = -2 + 6 - 3 + 2 = 3$.

2. *La fonction* $f(x,0) = 2x^3 + 2$ *tend vers* $-\infty$ *quand* $x \longrightarrow -\infty$, *donc il n'y a pas de minimum global. La même fonction* $f(x,0) = 2x^3 + 2$ *tend vers* $+\infty$ *quand* $x \longrightarrow +\infty$, *donc il n'y a pas de maximum global non plus sur* $\mathbb{R}^2$.

3. *Prenons la restriction de* $f(x,y)$ *sur la droite* $y = x+1$:
   $g(x) = f(x,x+1) = 2.x^3+6.x.(x+1)-3(x+1)^2+2 = 2x^3+6x^2+6x-3x^2-6x-3+2 = 2x^3+3x^2-1$ *pour* $-2 \le x \le 0$. *Les extremums locaux sur* L *on cherche parmi les points critiques, c'est-à-dire les points où* $g'(x) = 0$: $g'(x) = 6x^2 + 6x = 0$ *a pour solution* $x = 0$ *et* $x = -1$.



Il y a un maximum local en -1 *et un minimum local en* 0 *avec les valeurs :* 0 *et* -1. *Il faut les comparer aux valeurs sur les points du bord de* L *pour trouver les extremums globaux. Alors,* $g(-2) = -5$ *et* $g(0)$ *est un point de min local avec la valeur* -1. *On voit que le maximum global de valeur* 0 *est atteint à l'intérieur de* L, *en point* $x = -1$ *(point* $(-1,0)$ *du plan), tandis que minimum global de valeur* -5 *est atteint en point* $x = -2$ *(point* $(-2,-1)$ *du plan)*

Exercice 0.2.7.8
Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $f(x,y) = (x^2+y^2-8)(x^2+y^2)$.

1. *Déterminer les points stationnaires de* f.
2. *Donner la nature des points trouvés en* 1.

Corrigé 0.2.7.8
Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par*
$f(x,y) = (x^2+y^2-8)(x^2+y^2)$.

1. *Déterminer les points stationnaires de* f.
   La fonction f *est un polynôme, donc elle est de classe* $\mathcal{C}^\infty$.
   Les points stationnaires de f *sont les points* (x,y) *tels que*
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x(x^2+y^2-4) = 0$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y(x^2+y^2-4) = 0$.
   Ces points sont l'origine $O(0,0)$ *et tous les points du cercle de centre* O *et de rayon* 2 $(x^2+y^2 = 4)$.
2. *Donner la nature des points trouvés en* 1.
   Les dérivées partielles secondes de f *sont*

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4(3x^2+y^2-4)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4(x^2+3y^2-4)$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 8xy$.

La matrice Héssienne est donc $\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4(3x^2+y^2-4) & 8xy \\ 8xy & 4(x^2+3y^2-4) \end{pmatrix}$ *et son déterminant est* $det\mathcal{H}_f(x,y) = 16(3x^2+y^2-4).(x^2+3y^2-4) - 64x^2y^2$.

Natures des points stationnaires :

(a) *Pour le point* O*, puisque* $det\mathcal{H}_f(0,0) = 16^2 > 0$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) - 16 < 0$, f *admet un maximum en* O *qui est* $f(0,0) = -8$

(b) *Pour les points du cercle de centre* O *et de rayon* 2 $(x^2+y^2=4)$*, puisque* $det\mathcal{H}_f(x,y) = 0$*, le théorème ne s'applique pas. On utilise donc le formule de Taylor à l'ordre* 2.

En effet, pour tout point (a,b) *du cercle on a*

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) - f(a,b)) &= \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2) + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= Q(h,k) + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

Mais $a^2+b^2 = 4$ *donc* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = 8a^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) = 16ab$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = 8b^2$ *et donc* $Q(h,k) = 8a^2h^2 + 16abhk + 8b^2k^2 = 8(ah+bk)^2 \geq 0$

Ce qui prouve que f *admet un minimum en tout point du cercle.*

Exercice 0.2.7.9

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par :* $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1. *Déterminer les points critiques de* f A_1 *et* A_2 .
2. *Montrer que l'origine est un point selle.*
3. *Montrer que les points* A_1 *et* A_2 *sont des minima locaux. Sont-ils les seuls ?*
4. *En utilisant l'inégalité* $(x-y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$*, établir que* A_1 *et* A_2 *sont des minima globaux. Sont-ils les seuls ?*
5. *La fonction* f *admet-elle un maximum local ? un maximum global ?*
6. *Étudier les extremums de* f *sur le disque fermé* D *de centre* $O(0,0)$ *et de rayon* 1.

Corrigé 0.2.7.9

1. *Les points critiques sont donnés par le systèmes*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4(x^3 - x + y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4(y^3 + x - y) = 0 \end{cases}$$

La somme des deux lignes montre que $y^3 = -x^3$*, ce qui revient à dire que* $y = -x$ *puisqu'on travaille avec des nombres réels. On substitue alors* $-x$ *à* y *dans l'une des deux équations du système et on obtient au final trois points critiques* O, $A_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ *et* $A_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

2. *Le calcul des dérivées à l'ordre deux donne*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(3x^2 - 1) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4(3y^3 - 1) \end{cases}$$

3. *Au point O (voir figure A.20 a gauche) : $pr - q^2 = 0$, donc on ne peut rien dire a priori. Cependant, on remarque que $f(0,0) = 0$, or f n'est pas de signe constant au voisinage de l'origine. En effet $f(x,x) = 2x^4 > 0$, alors que $f(x,-x) = 2x^2(x^2-4) < 0$ pour x voisin de 0. Ceci montre que O est un point selle pour f.*
4. *Au point A_1 : $pr - q^2 = 384 > 0$ avec $p = 20 > 0$, donc minimum local. Au point A_2 : $pr - q^2 = 384 > 0$ avec $p = 20 > 0$, donc minimum local. Ce sont bien entendu les seuls minima locaux puisqu'un minimum local correspond nécessairement ? un point critique de f.*
5. *On vérifie sans problème l'inégalité proposée, d'où l'on d ?duit que pour tout point (x,y) du plan :*

$$f(x,y) \geq x^4 + y^4 - 4(x^2+y^2) = (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 - 8 \geq -8.$$

Or $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$, ce qui prouve que A_1 et A_2 correspondent à des minima globaux pour f. Par la question 3), ce sont bien sur les seuls puisque sur un ouvert (ici $\mathbb{R}^2$) un minimum global est a fortiori minimum local.

6. *L'étude des points critiques montre que f n'admet ni maximum local ni maximum global.*
7. *La fonction f est continue sur le compact D, elle y atteint ses extremums. On remarque que le point critique $O(0,0)$ est un point selle et que les autres points critiques qui réalisent des minimas n'appartiennent pas au disque, donc les extremums sont atteints sur le cercle (bord du disque) centre $O(0,0)$ et de rayon 1.*
Sur le cercle la fonction f devient

$$g(\theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta)) = (\cos(\theta))^4 + (\sin(\theta))^4 - 2(\cos(\theta) - \sin(\theta))^2$$

qu'on étudie comme fonction d'une seule variable.

Exercice 0.2.7.10
Soit dans $\mathbb{R}^2$ la courbe d'équation $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 30$. Trouver ses points les plus proches et les plus éloignés de l'origine.

Corrigé 0.2.7.10

Ceci revient à trouver les extremums de $f(x,y) = x^2 + y^2$ (carré de la distance d'un point $M(x,y)$ à l'origine) sous la contrainte $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 30$.

On cherche les extremums d'une fonction continue sur une ellipse du plan, c'est-a-dire un compact. On est donc certain que maximum et minimum sont atteints. Pour les déterminer, on utilise la méthode de Lagrange.

Notons $g(x,y) = 5x^2 - 4xy + 2y^2 - 30$ la contrainte. Le lagrangien du problème s'écrit donc

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = (x^2+y^2) + \lambda.(5x^2 - 4xy + 2y^2 - 30).$$

Ses dérivées partielles sont

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda(10x - 4y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda(-4x + 4y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 5x^2 - 4xy + 2y^2 - 30 = 0 \end{cases}$$

L'élimination de λ entre les deux premières équations donne la nouvelle equation :

$$2x^2 + 3xy.2y^2 = 0 \quad (+)$$

laquelle, combinée avec la troisième equation, permet d'obtenir y en fonction de x :

$$y = 7x - \frac{30}{x}$$

. On substitue dans $(+)$ pour obtenir l'équation bicarrée :

$$x^4 - 10x^2 + 24 = 0,$$

ce qui se résout sans problème via le changement d'inconnue $X = x^2$. Au final, on obtient quatre couples (x, y) de valeurs critiques pour le lagrangien

$$A_1(\sqrt{6}, 2\sqrt{6}), A_2(-\sqrt{6}, -2\sqrt{6}), A_3(2, -1), A_4(-2, 1).$$

Il suffit alors de calculer la valeur de f en ces points pour en déduire leur nature : $f(\sqrt{6}, 2\sqrt{6}) = f(-\sqrt{6}, -2\sqrt{6}) = 30$ et $f(2, -1) = f(-2, 1) = 5$. Donc A_1 et A_2 sont les points de l'ellipse les plus loin de l'origine, alors que A_3 et A_4 en sont les plus proches, comme illustre figure.

Exercice 0.2.7.11

Calculer le maximum et le minimum de la fonction f sous la (les) contrainte(s) indiquée(s) :

1. $f(x, y) = xy$ *sous la contrainte* $g(x, y) = x + y - 6 = 0$,
2. $f(x, y) = xy$ *sous la contrainte* $g(x, y) = x + y - 6 = 0$,
3. $f(x, y, z) = 2x^2 - 3xy + y - 3z + 2yz$ *sous les contraintes*

$$\begin{cases} g(x, y, z) = 3x - 2y + 2z - 4 = 0 \\ h(x, y, z) = x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Corrigé 0.2.7.11

1. $f(x, y) = xy$, *et* $g(x, y) = x + y - 6 = 0$

   Soit $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

   Les conditions d'extremum du premier degré de $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 6)$ sont réalisés aux points solutions du système (points stationnaires)

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ g(x, y) = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+\lambda=0 \\ x+\lambda=0 \\ x+y=6 \end{cases}$$

Donc $x=3$, $y=3$ *et* $\lambda=-3$, *seul le point* $(3,3)$ *peut être un extremum pour* f.

$$\begin{vmatrix} L''_{x^2}(x,y,\lambda) & L''_{xy}(x,y,\lambda) & L''_{y\lambda}(x,y,\lambda) \\ L''_{xy}(x,y,\lambda) & -L''_{y^2}(x,y,\lambda) & L''_{xy}(x,y,\lambda) \\ L''_{x\lambda}(x,y,\lambda) & L''_{y\lambda}(x,y,\lambda) & L''_{\lambda^2}(x,y,\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2>0$$

Donc f *admet un maximum au point* $(3,3)$ *et ce maximum est* $f(3,3)=9$.

2. $f(x,y,z)=x^2-2xy+y^2+5z^2$, *et* $g(x,y)=x+y+2z-10=0$

   Soit $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$

   Les conditions d'extremum du premier degré de $L(x,y,z,\lambda)=x^2-2xy+y^2+5z^2+\lambda(x+y+2z-10)$ *sont réalisés aux points solutions du système (points stationnaires)*

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z,\lambda)=0 \\ L'_y(x,y,z,\lambda)=0 \\ L'_z(x,y,z,\lambda)=0 \\ L'_\lambda(x,y,z,\lambda)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x+\lambda g'_x=0 \\ f'_y+\lambda g'_y=0 \\ f'_z+\lambda g'_z=0 \\ g(x,y,z)=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y+\lambda=0 \\ -2x+2y+\lambda=0 \\ 10z+2\lambda=0x+y+2z=10 \end{cases}$$

   Donc $x=5$, $y=5$ $z=0$ *et* $\lambda=-3$, *seul le point* $(5,5,0)$ *peut être un extremum pour* f. *On applique la formule de Taylor*

   $f(5+h,5+k,l)-f(5,5,l)=(5+h)^2-2(5+h)(5+k)+(5+k)^2+5l^2=(h-k)^2+l^2\geq 0$, *pour tout h,k et* l. *Donc* $f(5,5,0)$ *est un minimum pour* f.

3. $f(x,y,z)=2x^2-3xy+y-3z+2yz$ *et*

$$\begin{cases} g(x,y,z)=3x-2y+2z-4=0 \\ h(x,y,z)=x+z-1=0 \end{cases}$$

   On a $z=1-x$ *et* $y=\dfrac{1}{2}(3x-4+2-2x)$; *on remplace dans* f *et on obtient une fonction d'une seule variable qu'on optimise.*

Exercice 0.2.7.12
Utiliser la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE pour calculer le maximum et le minimum de la fonction f *sous la (les) contrainte(s) indiquée(s)*

1. $f(x,y)=x^2+y^2$ *sous la contrainte* $xy=1$.
2. $f(x,y)=3x+y$ *sous la contrainte* $x^2+y^2=10$.
3. $f(x,y)=e^{xy}$ *sous la contrainte* $x^3+y^3=16$.
4. $f(x,y,z)=2x+2y+z$ *sous la contrainte* $x^2+y^2+z^2=9$.
5. $f(x,y,z)=3x-y-3z$ *sous les contraintes* $x+y-z=0$ *et* $x^2+2z^2=1$.

Corrigé 0.2.7.12
On utilise la méthode de Lagrange

1. *$f(x,y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $xy = 1$.*
   La fonction de Lagrange est $f(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda.(xy-1)$.
   où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L, soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x,y,λ) des points critiques tels que

$$\overrightarrow{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y\lambda \\ 2y + x\lambda \\ xy - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x,y,\lambda) \in \{(1,1,-2),(-1,-1,-2)\}.$$

   La matrice Héssienne de L est $H_f(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & y \\ \lambda & 2 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$, dont le déterminant est

$$detH_f(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & y \\ \lambda & 2 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & x \\ x & 0 \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} \lambda & x \\ y & 0 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ y & x \end{vmatrix} = 2(-x^2) - \lambda(-xy) + y(-\lambda.x - 2y).$$

   Le déterminant de cette matrice aux points critiques est $detH_f(1,1,-2) = detH_f(-1,-1,-2) = -4 < 0$ et donc on conclut que f admet un minimum aux points $(1,1)$ et $(-1,-1,)$ sous la contrainte $xy-1$ et ce minimum est $f(1,1) = f(-1,-1) = 2$.
2. *$f(x,y) = 3x + y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 10$.*
   La fonction de Lagrange est $f(x,y) = 3x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 10)$.
   où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L, soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x,y,λ) des points critiques tels que

$$\overrightarrow{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x\lambda \\ 1 + 2y\lambda \\ x^2 + y^2 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x,y,\lambda) \in \{(3,1,1/2),(-3,-1,-1/2)\}.$$

   La matrice Héssienne de L est $H_f(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$, dont le déterminant est $detH_f(x,y,\lambda) = -8(y^4 + x^2\lambda)$.
   Le déterminant de cette matrice aux points critiques est $detH_f(1,1,-2) = detH_f(-1,-1,-2) = -4 < 0$ et donc on conclut que f admet un minimum aux points $(1,1)$ et $(-1,-1,)$ sous la contrainte $xy-1$ et ce minimum est $f(1,1) = f(-1,-1) = 2$.
3. *$f(x,y) = e^{xy}$ sous la contrainte $x^3 + y^3 = 16$.*
   La fonction de Lagrange est $f(x,y) = e^{xy} + \lambda(x^3 + y^3 - 16)$.
   où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L, soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x,y,λ) des points critiques tels que

$$\overrightarrow{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ye^{xy} + 3x^2\lambda \\ xe^{xy} + 3y^2\lambda \\ x^3 + y^3 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x,y) = (2,2,-\frac{e^4}{6}).$$

La matrice Héssienne de L est $H_f(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} y^2e^{xy}+6x\lambda & xye^{xy} & 3x^2 \\ xye^{xy} & x^2e^{xy}+6y\lambda & 3y^2 \\ 3x^2 & 3y^2 & 0 \end{pmatrix}$, *dont le déterminant est* $detH_f(2,2,-\frac{e^4}{6}) = \begin{vmatrix} 2e^4 & 2e^4 & 12 \\ 2e^4 & 2e^4 & 12 \\ 12 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

on ne peut pas conclure sur la nature du point critique.

On utilise don la méthode de substitution. On a, pour $x^3+y^3 = 16$, $f(x,y) = e^{xy} = e^{x.\sqrt[3]{16-x^3}} = h(x)$.

La dérivée première de h est $h'x) = -\frac{2.\sqrt[3]{16-x^3}.(x^3-8)}{(16-x^3)^{2/3}}$,

et la dérivée seconde de h est

$$h''x) = -\frac{2.\sqrt[3]{16-x^3}.\left(x^5 - 32x^2 - 32x^3\sqrt[3]{16-x^3} + 128\sqrt[3]{16-x^3} + 2x^6\sqrt[3]{16-x^3}\right)}{(16-x^3)^{5/3}}.$$

On a $h'x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ *et* $h''(2) < 0$.

La fonction admet donc un maximum local au point $(2,2)$ *et ce maximum est* $f(2,2) = e^4$.

Cependant, on analysant les courbes de niveau, on voit qu'il s'agit d'un maximum.

4. $f(x,y,z) = 2x + 2y + z$ *sous la contrainte* $x^2+y^2+z^2 = 9$.
5. $f(x,y,z) = 3x - y - 3z$ *sous les contraintes* $x + y - z = 0$ *et* $x^2 + 2z^2 = 1$.

Exercice 0.2.7.13

Soit $f : B \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1$ *où*

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 9\}.$$

1. *Montrer que f n'a pas de points critiques (stationnaires) dans l'ouvert*

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 < 9\}.$$

2. *Établir que l'origine* $O(0,0)$ *est un minimum global.*
3. *Établir les variations de f sur le cercle* $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 9\}$.

Corrigé 0.2.7.13

1. *Pour* $(x,y) \in U$, $df(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})dx + (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y)dy = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$, *et* $(0,0) \notin U$

Montrer que f n'a pas de points critiques (stationnaires) dans l'ouvert

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 9\}.$$

Le point stationnaire trouvé est $(0, 0)$ et ce point n'appartient pas à U.

2. *Établir que l'origine $(0, 0)$ est un minimum global.*
   On a $f(0, 0) = -1$ et $f(x, y) - f(0, 0) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 \geq 0$ pour tout (x, y) de $D_f = \mathbb{R}^2$.
   Donc f admet un minimum global au point $(0, 0)$ et ce minimum est $f(0, 0) = -1$.
3. *Étudier les variations de f sur le cercle $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$.*
   Sur le cercle $x^2 + y^2 = 9$ on passe aux coordonnées polaires

$$f(x, y) = f(3\cos(t), 3\sin(t)) = 3 + 9.\sin^2(t) - 1 = 2 + 9.\sin^2(t) = g(t).$$

Conditions nécessaires. *On a $g'(t) = 2.\sin(t).\cos(t) = 0 \Leftrightarrow t_0 = k\pi$ ou $t_1 = \dfrac{\pi}{2} + k.\pi$.*

Si l'extremum existe il est atteint aux points $t_0 = k\pi$ $t_1 = \dfrac{\pi}{2} + k.\pi$.

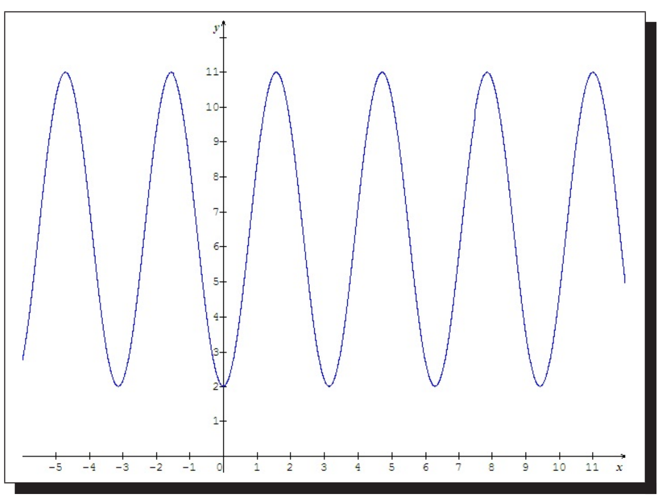
Conditions suffisantes. *On a $g''(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$.*

Pour les points $t_0 = k\pi$: $g''(k\pi) = \cos^2(k\pi) - \sin^2(k\pi) = 1 > 0$, alors g admet un minimum en ces points et donc f admet un minimum en $(x_0, y_0) = (\cos(t_0), \sin(t_0))$ et ce minimum est

$$f(x_0, y_0) = f(\cos(t_0), \sin(t_0)) = g(k\pi) = 2.$$

Pour les points $t_1 = \dfrac{\pi}{2} + k.\pi$: $g''(t_1) = \dfrac{\pi}{2} + k.\pi = \cos^2(t_1) = \dfrac{\pi}{2} + k.\pi - \sin^2(t_1) = \dfrac{\pi}{2} + k.\pi = -1 > 0$, alors g admet un maximum en ces points et donc f admet un maximum en $(x_1, y_1) = (\cos(t_1), \sin(t_1)) = 2$ et ce maximum est

$$f(x_1, y_1) = f(\cos(t_1), \sin(t_1)) = g(\frac{\pi}{2} + k.\pi) = 11.$$



Exercice 0.2.7.14
Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

1. *Déterminer les points stationnaires de f et leurs natures.*
2. *Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Déterminer les extremums de f sur le domaine D.*

Corrigé 0.2.7.14

1. *Déterminer les points stationnaires de f et leurs natures.*
   Les points sont donnés par le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$$

La nature des points stationnaires.

Les dérivées partielles secondes de f sont
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=4(3x^2-1)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=4(3y^2-1)$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-4$.

La matrice Héssienne est donc $\mathcal{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix} 4(3x^2-1) & -4 \\ -4 & 4(3y^2-1)\end{pmatrix}$ *et son déterminant est* $det\mathcal{H}_f(x,y)=16(3x^2-1).(3y^2-1)-16$.

- * *Pour le point* $(0,0)$*, le determinant est* $det\mathcal{H}_f(0,0)=16-16=0$*, on ne peut pas conclure. Mais* $f(x,x)=2x^4>0$ *et* $f(x,-x)=2x^4-2x^2<0$ *donc f n'a pas d'extremum en* $(0,0)$.
- * *Pour le point* $\mp(\sqrt{2},-\sqrt{2})$*, le determinant est*

$$det\mathcal{H}_f\big(\mp(\sqrt{2},-\sqrt{2})\big)=16.2>0,$$

comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(\mp(\sqrt{2},-\sqrt{2})\big)=8>0$ *f admet un minimum local en* $\big(\mp(\sqrt{2},-\sqrt{2})\big)$ *et ce minimum est*

$$f\mp(\sqrt{2},-\sqrt{2})=4+4-16=-8.$$

2. *Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par*

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\}.$$

Déterminer les extremums de f sur le domaine D.

La fonction f est continue sur le compact D (c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$) et donc y admet un minimum et un maximum.

Il reste à étudier les valeurs prises par f sur le bord de D. En passant aux coordonnées polaires on obtient

$$g(t)=f(2\cos(t),2\sin(t))=-8\sin^2(2t)+8\sin(2t)+8.$$

Étudions des variations de la fonction g.

On a

$$g'(t)=16\big(1-2\sin(2t)\big)\cos(2t)=0\Leftrightarrow t\in\{-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\}.$$

Natures de ces points

$$g''(t)=-32\big(\sin(2t)+2\cos(4t)\big).$$

$*$ $g''(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}) = 32 > 0$ *pour* k *impair et* $g''(-\frac{\pi}{4}+k\pi) = 96 > 0$ *pour* k *pair,* g *admet donc un minimum aux points* $-\frac{\pi}{4}+k\pi$ *et ce minimum est :*$g''(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}) = 8$ *pour* k *impair et* $g''(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}) = -8$ *pour* k *pair.*

$*$ $g''(\frac{\pi}{12}+k\pi) = -48 < 0$ *et* $g''(\frac{5\pi}{12}+k\pi) = -48 < 0$*,* g *admet donc un maximum aux points* $\frac{\pi}{12}+k\pi$ *et* $\frac{5\pi}{12}+k\pi$ *ce maximum est* $g(\frac{5\pi}{12}+k\pi) = 10$*.*

Donc g *admet un minimum aux points* t_0 *et ce minimum est* $g(t_0) = 8$*et un maximum aux points* t_1 *et* t_2 *et ce minimum est* $g(t_1) = 10$*.*

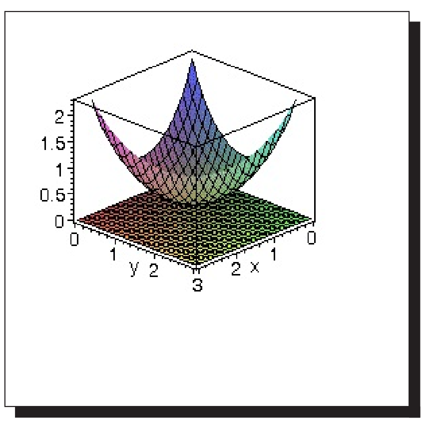
Ainsi la fonction f *admet sous la contrainte donnée un minimum un local au points* $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ *et* $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ *suivant que* k *est pair ou impair et ces minimums valent* -8 *et* 8*. et elle admet un maximum aux points* $\big(\cos(\frac{\pi}{12}+k\pi), \sin(\frac{\pi}{12}+k\pi)\big)$ *et* $\big(\cos(\frac{5\pi}{12}+k\pi), \sin(\frac{5\pi}{12}+k\pi)\big)$ *et ce maximum vaut* 10*.*

Exercice 0.2.7.15
Soit f *la fonction donnée par* $f(x,y) = x\ln(x) + y\ln(y) + (3-x-y)\ln(3-x-y)$*.*

1. *Donner* D_f *le domaine de définition de* f*.*
2. *Démontrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* D_f *et expliciter les dérivées partielles de* f *d'ordre* 1 *et d'ordre* 2 *en tout point* (x,y) *de* D_f *.*
3. *Déterminer les points critiques de* f *et étudier les extremums relatifs éventuels de* f*.*
4. *Soient les applications* f *et* h *données par* $\begin{cases} g(x,y,z) = xln(x) + y\ln(y) + z\ln z \\ h(x,y,z) = x+y+z-3. \end{cases}$

   Étudier les extremums relatifs lié de g *par la contrainte* $h(x,y,z) = 0$ *?*

Corrigé 0.2.7.15
Soit f *la fonction donnée par* $f(x,y) = x\ln(x) + y\ln(y) + (3-x-y)\ln(3-x-y)$*.*



1. *Le domaine de définition de* f *est le triangle*
   $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x > 0, y > 0, x+y < 3\}$ *.*

2. ***f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D_f.***

   L'application f est définie en tout point de D puisqu'alors les arguments des fonctions logarithmes qui interviennent dans la définition de f sont strictement positifs. En tout point où son argument est strictement positif, la fonction logarithme est de classe $\mathcal{C}^2$. Les fonctions polynomiales sont aussi de classe $\mathcal{C}^2$. Donc l'application f, composée d'applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, est elle-même de classe $\mathcal{C}^2$ sur D. Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D_f.

   Les dérivées partielles de f sur D_f.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1+\ln(x) - (1+\ln(3-x-y)) = \ln(x) - \ln(3-x-y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1+\ln(y) - 1+\ln(3-x-y)) = \ln(y) - \ln(3-x-y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3-x-y} = \dfrac{3-y}{x(3-x-y)} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{1}{3-x-y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{3-x-y} = \dfrac{3-x}{y(3-x-y)} \end{cases}$$

3. *Les points critiques de f sont donnés par le système*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1+\ln(x) - (1+\ln(3-x-y)) = \ln(x) - \ln(3-x-y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1+\ln(y) - 1+\ln(3-x-y)) = \ln(y) - \ln(3-x-y) = 0 \end{cases}$$

   Ceci est équivalent au système

$$\begin{cases} x = 3-x-y = \\ y = 3-x-y \end{cases}$$

   dont la solution est $(1,1)$. Le point critique est donc $(1,1)$.

   Nature du point $(1,1)$.

   Le déterminant de la matrice Héssienne est $detH_f(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{3-y}{x(3-x-y)} & \dfrac{1}{3-x-y} \\ \dfrac{1}{3-x-y} & \dfrac{3-x}{y(3-x-y)} \end{vmatrix}$,

   donc $detH_f(1,1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2 > 0$ *et donc f admet un minimum relatif au point $(1,1)$.*

4. *Soient les applications f et h données par*

$$\begin{cases} g(x,y,z) = xln(x) + y\ln(y) + z\ln z \\ h(x,y,z) = x+y+z-3. \end{cases}$$

   Étudier les extremums relatifs lié de g par la contrainte $h(x,y,z) = 0$?

   La contrainte $h(x,y,z) = 0$ impose que le point (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ est dans le plan d'équation $x+y+z = 3$. Dans ce plan, $z = 3-x-y$, et la valeur de g au point (x,y,z) est $f(x,y) = x\ln(x)+y\ln(y)+(3-x-y)\ln(3-x-y)$. Donc g est minimum au point d'abscisse 1 et d'ordonnée 1. En ce point, z vaut 1 et g est nul.

0.3 Intégrales multiples

0.3.1 Calcul du Jacobien

Exercice 0.3.1.1
Calculer les Jacobiens des fonctions suivantes

1. $f(x,y) = (x^2 + yx^2 + y, x - y^2)$
2. $f(x,y) = (\frac{x^2}{y^2+1}, x - y)$
3. $f(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v))$
4. $x = u^2v,\ y = uv^2, u \geq 0, v \geq 0$

Corrigé 0.3.1.1
Calcul des Jacobiens des fonctions suivantes

1. *On pose* $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = (x^2 + yx^2 + y, x - y^2)$. *Alors la matrice Jacobienne est donnée par*

$$J_f(x,y) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y & x^2+1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix}.$$

Le Jacobien est

$$detJ_f(x,y) = \begin{vmatrix} 2x+y & x^2+1 \\ 1 & -2y \end{vmatrix} = -4xy - 2y^2 - x^2 - 1.$$

2. $f(x,y) = (\frac{x^2}{y^2+1}, x - y)$.
De la même façon on a

$$detJ_f(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y^2+1} & \frac{-4xy}{(y^2+1)^2} \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{2x}{y^2+1} - \frac{-4xy}{(y^2+1)^2}.$$

3. *Pour la foctoin* $f(u,v) = (x,y) = (u\cos(v), u\sin(v))$ *la matrice Jacobienne est donnée par*

$$J_f(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) \\ \sin(v) & u\cos(v) \end{pmatrix}.$$

Le Jacobien est

$$detJ_f(u,v) = \begin{vmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) \\ \sin(v) & u\cos(v) \end{vmatrix} = u.$$

4. *Pour* $x = u^2v$, *et* $y = uv^2, u \geq 0, v \geq 0$ *la matrice Jacobienne est donnée par*

$$J_f(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2uv & u^2) \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix}.$$

Le Jacobien est

$$detJ_f(u,v) = \begin{vmatrix} 2uv & u^2 \\ v^2 & 2uv \end{vmatrix} = 3u^2v^2.$$

Exercice 0.3.1.2

Exercice 0.3.1.3

Calculer les Jacobiens des fonctions suivantes

1. $f(u,v,w) = (x,y,z) = (2u-1, 3v-4, \frac{1}{2}(w-4))$
2. $f(x,y,z) = (x^2+yx^2-z, x-y^2, x^2+y^2+xyz)$
3. $f(r,\theta,\varphi) = (x,y,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), \varphi)$,
4. $f(u,v,w) = (u\cos(v), u\sin(v), w)$;

Corrigé 0.3.1.2

Calcul des Jacobiens des fonctions suivantes

1. *On pose* $f(u,v,w) = (2u-1, 3v-4, \frac{1}{2}(w-4))$. *Alors la matrice Jacobienne est donnée par*

$$J_f(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Le Jacobien est

$$detJ_f(u,v,w) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2.3.\frac{1}{2} = 3$$

2. $f(x,y,z) = (x+yx^2-z, x-y^2, x^2+y^2+xyz)$. *De la même façon on a*

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1+2yx & x^2 & -1 \\ 1 & -2y & 0 \\ 2x+yz & 2y+xz & xy \end{pmatrix}.$$

$$detJ_f(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1+2yx & -2y & 2y+xz \\ x^2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & xy \end{vmatrix} = -yx^3 - x^2y^3 - 2xy^2 - 4xy - xz - 2y^2z - 2y.$$

3. *Pour la fonction* $f(r,\theta,\varphi)=(x,y,z)=(r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$. *la matrice Jacobienne est donnée par*

$$J_f(u,v,w)=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Le Jacobien est

$$det J_f(u,v,w)=\begin{vmatrix} cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{vmatrix}=r^2\cos(\varphi.$$

4. *Pour la fonction* $f(u,v,w)=(x,y,z)=(u\cos(v), u\sin(v), w)$ *la matrice Jacobienne est donnée par*

$$J_f(u,v,w)=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w} & \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & u\cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le Jacobien est

$$det J_f(u,v,w)=\begin{vmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & u\cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=u.$$

Exercice 0.3.1.4
On note $U=]0;+\infty[^2$ *et* $\phi:(x,y)\to(x^3y^2, \frac{1}{x^2y})$.
Montrer que ϕ *est un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme de* U *sur* U.

Corrigé 0.3.1.3 1. $U=]0;+\infty[^2$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et, d'après les théorèmes généraux,* ϕ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* U.

2. *Montrons que* ϕ *est une bijection de* U *sur* U *et explicitons* ϕ^{-1}.
Il est d'abord clair que : $\forall(x,y)\in U$, $\phi(x,y)\in U$. *Soit* $(u,v)\in U$. *On a, pour tout* $(x,y)\in U$ *:*

$$\phi(x,y)=(u,v)\Leftrightarrow(u,v)=(x^3y^2,\frac{1}{x^2y})\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x^3y^2=u \\ \frac{1}{x^2y}=v \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x^3y^2=u \\ x^2y=\frac{1}{v} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{uv^2} \\ y=u^2v^3 \end{array}\right.$$

Ainsi, ϕ *est bijective et* $\phi^{-1}(x,y)=(\frac{1}{xy^2}, x^2y^3)$.
ϕ^{-1} *est donc de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* U. *On conclut que* ϕ *est un* $\mathcal{C}^1$*-diffeomorphisme de* U *sur* U.

0.3.2 Intégrales doubles : Produit cartésien

***Exercice* 0.3.2.1**

Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales doubles suivantes

1. $I_1 = \int_0^3 \int_0^2 (4-y^2)dxdy.$
2. $I_2 = \int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2y-2xy)dxdy.$
3. $I_3 = \int_0^{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (\sin(x)+\cos(y))dxdy.$
4. $I_4 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^0 (x+y+1)dxdy.$

***Corrigé* 0.3.2.1**

1. *Calcul de* $I_1 = \int_0^3 \int_0^2 (4-y^2)dxdy.$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^3 \int_0^2 (4-y^2)dxdy = \int_0^3 \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 dx \\
&= \frac{16}{3}\int_0^3 dx = 16, \text{ ou encore} \\
I_1 &= \int_0^3 \int_0^2 (4-y^2)dxdy \\
&= \int_0^2 (4-y^2)\left[\int_0^3 dx\right]dy \\
&= \int_0^2 (4-y^2)\left[x\right]_0^3 dy \\
&= 3\int_0^2 (4-y^2)dy = 3.\int_0^2 (4-y^2)dy \\
&= 3.\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = 3.\frac{16}{3} = 16.
\end{aligned}$$

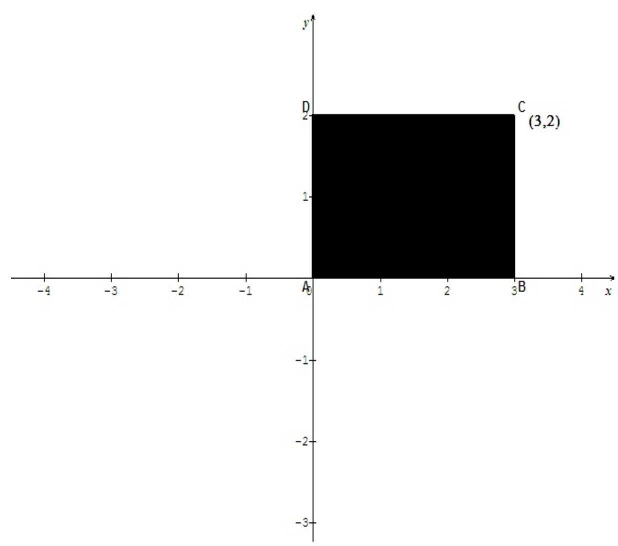


FIG. 1 – Domaine d'integration de I_1

.

2. *Calcul de* $I_2 = \int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2y-2xy)dxdy.$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2y - 2xy)dxdy \\
&= \int_0^3 \Big[\int_{-2}^0 (x^2y - 2xy)dy\Big]dx \\
&= \int_0^3 \Big[\frac{y^2x^2}{2}y - xy^2\Big]_{-2}^0 dx \\
&= \int_0^3 (4x - 2x^2)dx = \Big[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\Big]_0^3 = 0, \text{ ou enc} \\
I_2 &= \int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2y - 2xy)dxdy \\
&= \int_{-2}^0 \Big[\int_0^3 (x^2y - 2xy)dx\Big]dy \\
&= \int_{-2}^0 \Big[\frac{1}{3}x^3y - x^2y\Big]_0^3 dy = \int_{-2}^0 \Big[9y - 9y\Big]dy = 0.
\end{aligned}$$

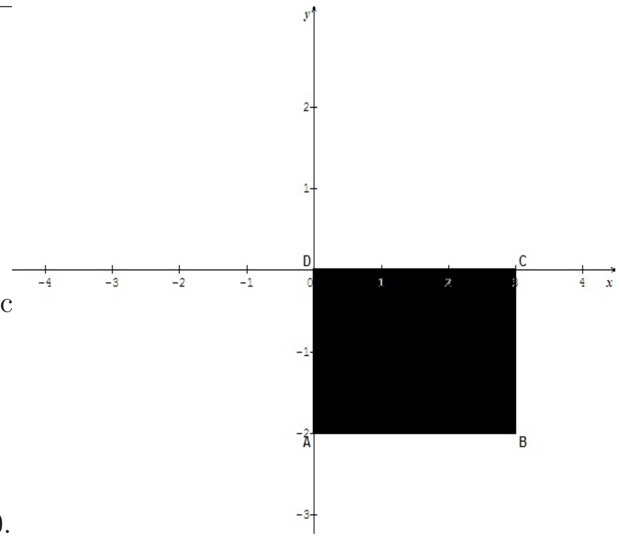


FIG. 2 – Domaine d'integration de I_2

3. *Calcul de* $I_3 = \int_\pi^{2\pi} \int_0^\pi (\sin(x) + \cos(y))dxdy.$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^\pi \int_\pi^{2\pi} (\sin(x) + \cos(y))dxdy \\
&= \int_0^\pi \Big[\int_\pi^{2\pi} (\sin(x) + \cos(y))dy\Big]dx \\
&= \int_0^\pi \Big[y\sin(x) + \sin(y)\Big]_\pi^{2\pi} dx \\
&= \int_0^\pi \Big[2\pi.\sin(x) - \pi.\sin(x)\Big]dx \\
&= \Big[-\pi.\cos(x)\Big]_0^\pi = 2.\pi, \quad \text{ou encore} \\
I_3 &= \int_0^\pi \int_\pi^{2\pi} (\sin(x) + \cos(y))dxdy \\
&= \int_\pi^{2\pi} \Big[\int_0^\pi (\sin(x) + \cos(y))dx\Big]dy \\
&= \int_\pi^{2\pi} \Big[-\cos(x) + x\cos(y)\Big]_0^\pi dy \\
&= \int_\pi^{2\pi} (\pi.\cos(x) + 2)dx \\
&= \Big[\pi.\sin(y) + 2y\Big]_\pi^{2\pi} = 2.\pi.
\end{aligned}$$

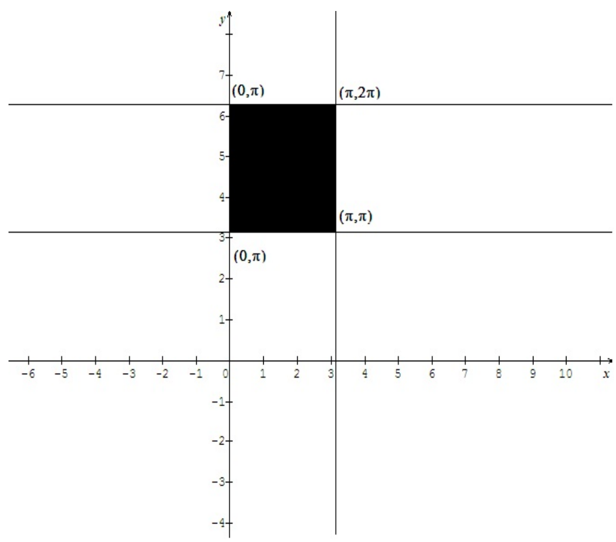


FIG. 3 – Domaine d'integration de I_3

4. *Calcul de* $I_4 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^0 (x + y + 1)dxdy.$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{0}(x+y+1)dxdy \\ &= \int_{-1}^{0}\Big[\frac{x^2}{2}+xy+x\Big]_{-1}^{1}dy \\ &= \int_{-1}^{0}(2y+2)dy = \Big[y^2+xy+2y\Big]-1^0 = 1. \end{aligned}$$

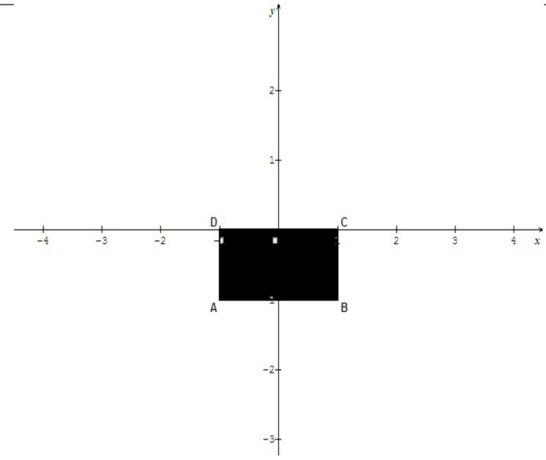


FIG. 4 – Domaine d'intégration de I_4

***Exercice* 0.3.2.2**

Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales doubles suivantes

1. $I_1 = \iint_{D_1}(x\sin(y))dxdy,$
   où $D_1 : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le x.$
2. $I_2 = \iint_{D_4} 3y^3e^{xy}dxdy,$
   où $D_2 =: 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le 1.$
3. $I_3 = \iint_{D_3}\frac{xe^{2y}}{4-y}dxdy,$
   où $D_3 : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4-x^2.$

***Corrigé* 0.3.2.2**

1. *Calcul de* $I_5 = \iint_{D_1}(x\sin(y))dxdy,$ *où* $D_1 : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le x.$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi}\int_0^{x} x\sin(y)dxdy \\ &= \int_0^{\pi}\Big[\int_0^{x} x\sin(y)dy\Big]dx \\ &= \int_0^{\pi}\Big[-x\cos(y)\Big]_0^{x}dx \\ &= \int_0^{\pi}\big(x - x\cos(x)\big)dx \\ &= \Big[\frac{x^2}{2}-(\cos(x)+x\sin(x))\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}+2. \end{aligned}$$

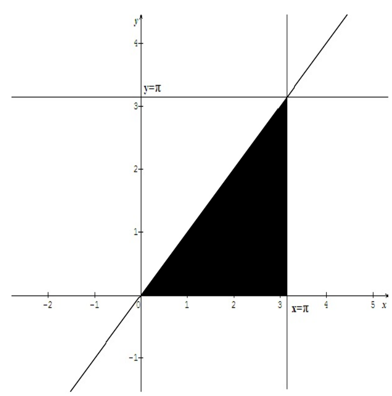


FIG. 5 – Domaine d'integration de I_1

2. *Calcul de* $I_2 = \iint_{D_4} 3y^3e^{xy}dxdy,$ *où* $D_2 =: 0 \le x \le 1), \sqrt{x} \le y \le 1.$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 3y^3 e^{xy} dxdy \\
&= \int_0^1 \Big[\int_{\sqrt{x}}^1 3y^3 e^{xy} dy\Big] dx \\
&= \int_0^1 \Big[\int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} dx\Big] dy \\
&= \int_0^1 \Big[3y^2 e^{xy}\Big]_0^{y^2} dy \\
&= \int_0^1 \big(3y^2 e^{y^3} - 3y^2\big) dy \\
&= \Big[e^{y^3} - y^3\Big]_0^1 = e - 2
\end{aligned}$$

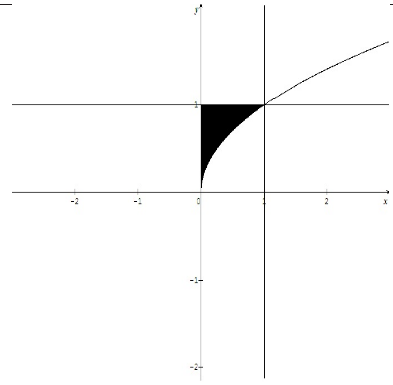


FIG. 6 – Domaine d'integration de I_2.

3. *Calcul de* $I_3 = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy$.

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy \\
&= \int_0^4 \Big[\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dx\Big] dy \\
&= \int_0^4 \Big[\frac{x^2 e^{2y}}{2(4-y)}\Big]_0^{\sqrt{4-y}} dy \\
&= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy = \Big[\frac{e^{2y}}{4}\Big]_0^4 = \frac{e^8 - 1}{4}
\end{aligned}$$

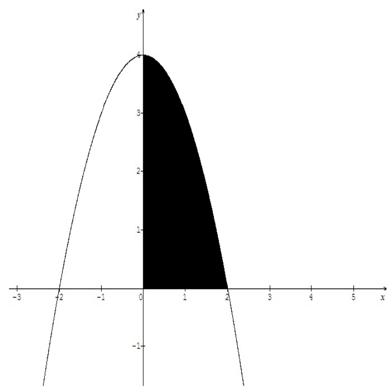


FIG. 7 – Domaine d'integration de I_3.

***Exercice* 0.3.2.3**
Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales doubles suivantes en changeant l'ordre d'intégration si nécessaire

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^2 \int_{x^2-1}^{x+1} (x^2 + y) dxdy$.
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (xy + y^3) dxdy$.
3. $I_3 = \displaystyle\int_1^{10} \int_0^{1/y} ye^{xy} dxdy$.
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^{2\sqrt{\ln(3)}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln(3)}} e^{x^2} dxdy$.
5. $I_5 = \displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dxdy$.
6. $I_6 = \displaystyle\int_{-1}^1 \int_{2y^2-2}^{y^2-1} dxdy$.
7. $I_7 = \displaystyle\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin(y)}{y} dxdy$.
8. $I_8 = \displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1} dxdy$.

***Corrigé* 0.3.2.3** *Représentations des domaines d'intégration et calcul des intégrales doubles suivantes en changeant l'ordre d'intégration si nécessaire*

1. *Calcul de* $I_1 = \int_{-1}^{2}\int_{x^2-1}^{x+1}(x^2+y)dxdy$. *Le domaine est donné par :*

   $D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\leq x\leq 2 \text{ et } x^2-1\leq y\leq x+1\}$. *Dans ce cas x est fixé.*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^{2}\Big[\int_{x^2-1}^{x+1}(x^2+y)dy\Big]dx = \int_{-1}^{2}\Big[yx^2+\frac{1}{2}y^2\Big]_{x^2-1}^{x+1}dx \\ &= \int_{-1}^{2}\Big[(x+1)x^2+\frac{1}{2}(x+1)^2-(x^2-1)x^2-\frac{1}{2}(x^2-1)^2\Big]dx \\ &= \Big[-\frac{3}{10}x^5+\frac{1}{4}(x)^4+\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^{2} = \frac{117}{20} \end{aligned}$$

2. $I_2 = \int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt{y}}(xy+y^3)dxdy$. *Le domaine est donné par :*

   $D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\leq 4 \text{ et } y/2\leq x\leq\sqrt{y}\}$. *Dans ce cas y est fixé.*

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^4\Big[\int_{y/2}^{\sqrt{y}}(xy+y^3)dx\Big]dy = \int_0^4\Big[\frac{yx^2}{2}+xy^3\Big]_{y/2}^{\sqrt{y}}dy \\ &= \int_0^4\Big[\frac{y^2}{2}+y^{7/2}-\frac{y^3}{8}-\frac{y^4}{2}\Big]dx \\ &= \Big[-\frac{3}{10}x^5+\frac{1}{4}(x)^4+\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^{2} = \frac{117}{20} \end{aligned}$$

3. *Calcul de* $I_3 = \int_1^{10}\int_0^{1/y} ye^{xy}dxdy$.

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_1^{10}\int_0^{1/y} ye^{xy}dxdy = \int_1^{10}\Big[\int_0^{1/y} ye^{xy}dx\Big]dy \\ &= \int_1^{10}\Big[e^{xy}\Big]_0^{1/y}dx = \int_1^{10}\big(e^1-1\big)dx = 9(e-1). \end{aligned}$$

4. *Calcul de* $I_4 = \int_0^{2\sqrt{\ln(3)}}\int_{y/2}^{\sqrt{\ln(3)}} e^{x^2}dxdy$.

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^{2\sqrt{\ln(3)}}\int_{y/2}^{\sqrt{\ln(3)}} e^{x^2}dxdy = \int_0^{\sqrt{\ln(3)}}\int_0^{2x} e^{x^2}dxdy \\ &= \int_0^{\sqrt{\ln(3)}}\Big[\int_0^{2x} e^{x^2}dy\Big]dx = \int_0^{\sqrt{\ln(3)}} e^{x^2}\Big[y\Big]_0^{2x}dx \\ &= \int_0^{\sqrt{\ln(3)}} 2xe^{x^2}dx = \Big[e^{x^2}\Big]_0^{\sqrt{\ln(3)}} = e^{\ln(3)}-1 = 2. \end{aligned}$$

5. *Calcul de* $I_5 = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0}\frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}dxdy$.

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^2\Big[\frac{yx^2}{2}+xy^3\Big]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{y}}dy \\ &= \int_0^4\Big[\frac{y^2}{2}+y^{7/2}-\frac{y^3}{8}-\frac{y^4}{2}\Big]dx \\ &= \Big[-\frac{3}{10}x^5+\frac{1}{4}(x)^4+\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^{2} = \frac{117}{20} \end{aligned}$$

6. *Calcul de* $I_6 = \int_{-1}^{1}\int_{2y^2-2}^{y^2-1}dxdy$.

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_{-1}^{1} \Big[x\Big]_{2y^2-2}^{y^2-1} dy = \int_{-1}^{1} (-y^2+1)dy \\ &= \Big[-\frac{1}{3}y^3 + y\Big]_{-1}^{1} = \frac{117}{20} \end{aligned}$$

7. *Calcul de* $I_7 = \int_0^{\pi}\int_x^{\pi} \frac{\sin(y)}{y} dxdy.$

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_0^{\pi} \Big[\int_0^{y} \frac{\sin(y)}{y} dx\Big] dy = \int_0^{\pi} \sin(y)dy \\ &= \Big[-\cos(y)\Big]_0^{\pi} = 2 \end{aligned}$$

8. *Calcul de* $I_8 = \int_0^{8}\int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{1}{y^4+1} dxdy.$

$$\begin{aligned} I_8 &= \int_0^{8} \Big[\int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{1}{y^4+1} dy\Big] dx = \int_0^{2} \Big[\int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1} dx\Big] dy \quad . \\ &= \int_0^{2} \Big[\frac{y^3}{y^4+1}\Big] dy = \frac{1}{4}\Big[\ln(y^4+1)\Big]_0^{2} = \frac{\ln(17)}{4}. \end{aligned}$$

Les graphes des domaines d'intégration

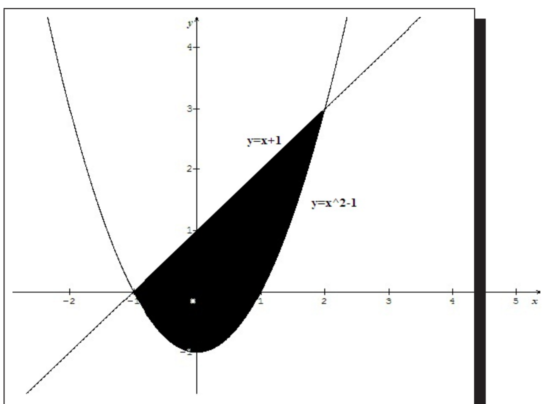


FIG. 8 – Domaine d'integration de I_1

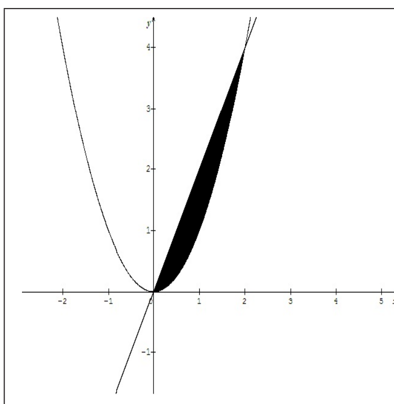


FIG. 9 – Domaine d'integration de I_2.

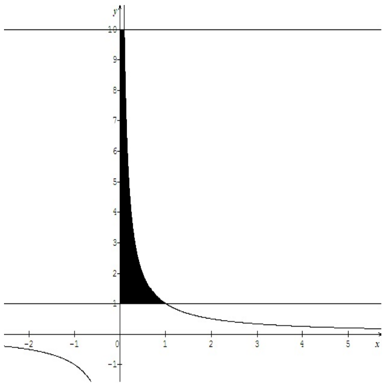


FIG. 10 – Domaine d'integration de I_3

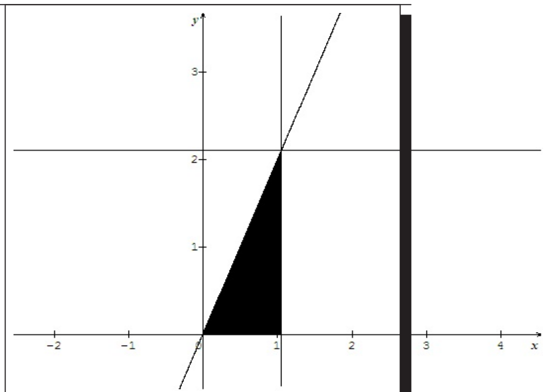


FIG. 11 – Domaine d'integration de I_4

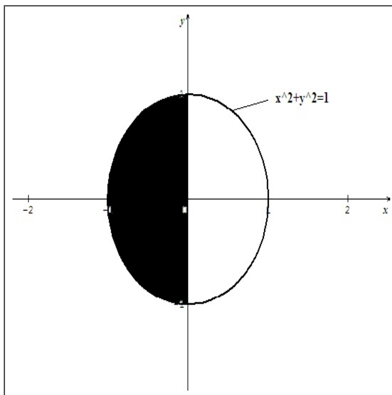


FIG. 12 – Domaine d'integration de I_5

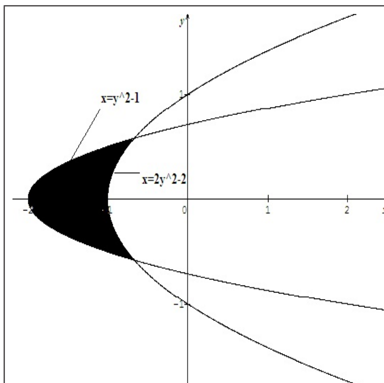


FIG. 13 – Domaine d'integration de I_6

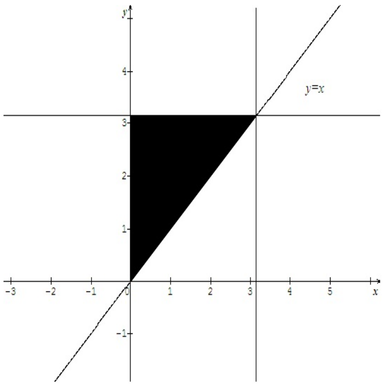


FIG. 14 – Domaine d'integration de I_7

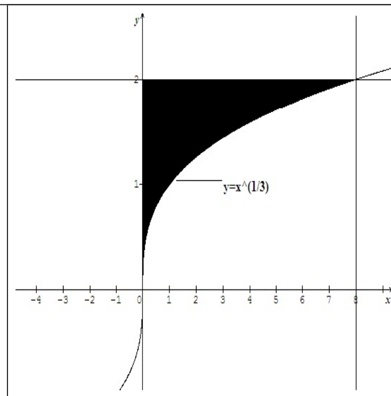


FIG. 15 – Domaine d'integration de I_8

***Exercice* 0.3.2.4**
Calculer les intégrales doubles suivantes

1. $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, *où* $D_1 : x+y \leq 3, x \geq 1, y \geq 1.$

2. $I_2 = \iint_{D_2} e^{-y^2} dxdy$, *où* $D_2 : 0 \leq x \leq 3, \dfrac{x}{3} \leq y \leq 1.$

***Corrigé* 0.3.2.4**

1. *Calccul de* $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, *où* $D_2 : x+y \leq 3, x \geq 1, y \geq 1.$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_1^2 \Big[\int_1^{3-x} \frac{dy}{(x+y)^2}\Big] dx \\
&= \int_1^2 \Big[-\frac{1}{x+y}\Big]_1^{3-x} dx \\
&= \int_1^2 \Big[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\Big] dx \\
&= \Big[\ln(x+1) - \frac{x}{3}\Big]_1^2 = \ln(\frac{3}{2}) - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

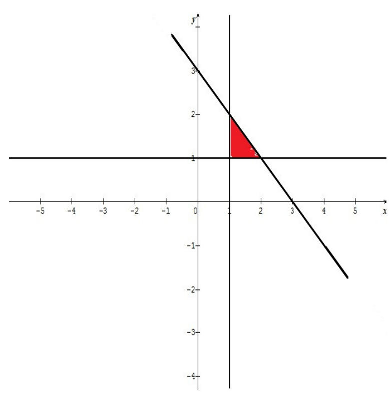


FIG. 16 – Domaine d'integration de I_2.

2. *Calcul* $I_2 = \iint_{D_2} e^{-y^2} dxdy$, *où* $D_3 : 0 \leq x \leq 3, \dfrac{x}{3} \leq y \leq 1.$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^3 \Big[\int_{x/3}^1 e^{-y^2}dy\Big]dx \\ &= \int_0^1 \Big[\int_0^{3y} e^{-y^2}dx\Big]dy \\ &= \int_0^1 3ye^{-y^2}dy \\ &= \Big[-\frac{3}{2}e^{-y^2}\Big]_0^1 = \frac{3(e-1)}{2e} \end{aligned}$$

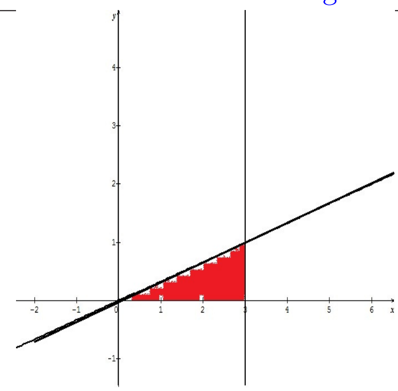


FIG. 17 – Domaine d'integration de I_2.

0.3.3 Intégrales doubles : Changement de variables

***Exercice* 0.3.3.1**
Calculer les intégrales doubles suivantes

1. $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} \frac{dxdy}{(x+y)^2}$,
   où $D_1 : x+y \leq 3, x \geq 1, y \geq 1.$

2. $I_2 = \iint_{D_3} e^{-y^2}dxdy$,
   où $D_2 : 0 \leq x \leq 3, \dfrac{x}{3} \leq y \leq 1.$

***Corrigé* 0.3.3.1**

1. $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} (2x^2 - xy - y^2)dxdy$, *où* D_1 *est la partir du premier quadrant borné limité par les droites*
   $y = -2x+4$, $y = -2x+7$, $y = x-2$ *et* $y = x+1$.
   On a $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} (2x^2 - xy - y^2)dxdy = \iint_{D_1} (x-y)(2x+y)dxdy.$
   On pose $u = x-y$ *et* $v = 2x+y$ *et on résout le système* $\begin{cases} x-y=u \\ 2x+y=v \end{cases}$
   On trouve $x = \dfrac{1}{3}(u+v)$ *et* $y = \dfrac{1}{3}(-2u+v)$.
   On pose $f(u,v) = (x,y)$ *avec* $u = x-y$ *et* $v = 2x+y$. *Alors* $I_1 = \displaystyle\iint_{U_1} uv|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}|dudv.$
   Le jacobien est
   $$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}.$$
   Donc $I_1 = \dfrac{1}{3}\displaystyle\iint_{U_1} uvdudv.$
   Detérminons U_1.

Équations en (x,y)	*Équations correspondantes en* (u,v)	*Simplification*
$y=-2x+4$	$\frac{1}{3}(-2u+v)=-2.\frac{1}{3}(u+v)+4$	$v=4$
$y=-2x+7$	$\frac{1}{3}(u+v)=-2.\frac{1}{3}(u+v)+7$	$v=7$
$y=x-2$	$\frac{1}{3}(-2u+v=\frac{1}{3}(u+v)-2$	$u=2$
$y=x+1$	$\frac{1}{3}(-2u+v=\frac{1}{3}(u+v)+1$	$u=-1$

.

Donc $U_1=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : -1\leq u\leq 2; 4\leq v\leq 7\}$ *et*

$$I_1=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\int_{4}^{7}uvdudv=\frac{1}{3}\Big(\int_{-1}^{2}udu\Big).\Big(\int_{4}^{7}vdv\Big)=\frac{1}{3}\Big[\frac{u^2}{2}\Big]_{-1}^{2}\Big[\frac{v^2}{2}\Big]_{4}^{7}=\frac{33}{4}.$$

2. *Calcul de* $I_2=\iint_{D_2}x^2dxdy$*, où* D_4 *est le demi-disque de rayon* R *et de centre* $\Omega(R,0)$*.*
   l'équation du domaine est $x^2+y^2=2Rx$ *avec* $y\geq 0$*. On passe aux coordonnées polaires* $x=r\cos(\theta)$*,* $y=r\sin(\theta)$ *avec* $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ *et* $0\leq r\leq 2R\cos(\theta)$*.*

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[\int_0^{2R\cos(\theta)}r^3\cos^2(\theta)dr\Big]d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\theta)\Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^{2R\cos(\theta)}d\theta=4R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6(\theta)d\theta \\ &= 4R^4\Big[\frac{5\theta}{16}+\frac{15\sin(2\theta)}{64}+\frac{3\sin(4\theta)}{64}+\frac{5\sin(6\theta)}{192}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{5R^4\pi}{8} \end{aligned}$$

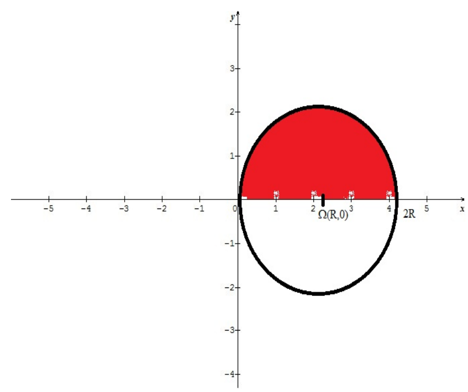


FIG. 18 – Domaine d'integration de I_2.

***Exercice* 0.3.3.2**
Calculer, en utilisant le changement de variables convenable, les intégrales suivantes :

1. $I_1=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}(x^2+y^2)dxdy.$
2. $I_2=\int_0^6\int_0^y xdxdy.$
3. $I_3=\int_{-1}^0\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0\frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2)}}dxdy.$
4. $I_4=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$
5. $I_5=\int_0^2\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}}\frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy.$

***Corrigé* 0.3.3.2**

1. *On pose* $x=r\cos(\theta)$*,* $x=r\sin(\theta)$*, avec* $0\leq r\leq 1$ *et* $0\leq\theta\leq\pi/2$*.*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1\int_0^{\pi/2} r.r^2.dr.d\theta = \Big(\int_0^1 r^3.dr\Big).\Big(\int_0^{\pi/2} d\theta\Big) \\ &= \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^1\Big[\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}.$$

2. On pose $x = r\cos(\theta)$, $x = r\sin(\theta)$, avec $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ et $0 \le r \le \frac{6}{\sin(\theta)}$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^6\int_0^y x dx dy = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{6/\sin(\theta)} r^2\cos(\theta)d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(\theta)\Big[\int_0^{6/\sin(\theta)} r^2 dr\Big]d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(\theta)\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^{6/\sin(\theta)}d\theta \\ &= 72\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(\theta)\frac{1}{\sin^3(\theta)}d\theta = 72\Big[-\frac{1}{2\sin^2(\theta)}\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{72}{2}\big(1-2\big) = 36. \end{aligned}.$$

3. On pose $x = r\cos(\theta)$, $x = r\sin(\theta)$, avec $0 \le r \le 1$ et $\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1\int_\pi^{3\pi/2} \frac{r}{1+r}.dr.d\theta = \Big(\int_0^1 (1-\frac{1}{1+r})dr\Big).\Big(\int_\pi^{3\pi/2} d\theta\Big) \\ &= \Big[r-\ln(1+r)\Big]_0^1\Big[\theta\Big]_\pi^{3\pi/2} = \frac{\pi}{2}(1-\ln(2)). \end{aligned}.$$

4. On pose $x = r\cos(\theta)$, $x = r\sin(\theta)$, avec $0 \le r \le 1$ et $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1\int_0^{\pi/2} re^{-r^2}.dr.d\theta = \Big(\int_0^1 (e^{-r^2})dr\Big).\Big(\int_0^{\pi/2} d\theta\Big) \\ &= \Big[-\frac{e^{-r^2}}{2}\Big]_0^1\Big[\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi(1-e^{-1})}{4}. \end{aligned}.$$

5. On pose $x = r\cos(\theta)$, $x = r\sin(\theta)$, avec $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ et $0 \le r \le 2\cos(\theta)$. On a alors

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos(\theta)} \frac{r(\cos(\theta)+\sin(\theta))}{r^2}r.dr.d\theta = \int_0^{\pi/2}\Big[\int_0^{2\cos(\theta)}(\cos(\theta)+\sin(\theta))dr\Big]d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\big(\cos(\theta)+\sin(\theta)\big)\Big[r\Big]_0^{2\cos(\theta)}d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\big(\cos^2(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta)\big)d\theta \\ &= 2\Big[\frac{\theta}{2}+\frac{2\sin(\theta)}{4}+\frac{1}{2}\sin^2(\theta)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}+1. \end{aligned}$$

Exercice 0.3.3.3

1. *Calculer la moyenne de la fonction f sur le disque D de centre $O(0,0)$ et de rayon a dans les cas suivants*

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. | (b) $f(x,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

2. *Calculer la moyenne de la fonction f sur le domaine D dans le cas suivant*
   $f(x,y) = \frac{1}{xy}$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ln(2) \le x \le 2\ln(2), \ln(2) \le y \le 2\ln(2)\}$.

***Corrigé* 0.3.3.3**

1. *On fait le changement de variables par passage aux coordonnées polaires* $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$. *Alors*
   (a) $I=\dfrac{1}{\pi a^2}\displaystyle\int_0^a\int_0^{2\pi} r^2 dr d\theta = \dfrac{1}{\pi a^2}.2\pi.\Big[\dfrac{r^3}{3}\Big]_0^a = \dfrac{2a}{3}.$
   (b) $I = \dfrac{1}{\pi a^2}\int_0^a\int_0^{2\pi} r\sqrt{a^2-r^2}drd\theta = \dfrac{1}{\pi a^2}.2\pi.\Big[-\dfrac{(a^2-r^2)^{3/2}}{3}\Big]_0^a = \dfrac{2a}{3}.$
2. $$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\big(\ln(2)\big)^2}\int_{\ln(2)}^{2\ln(2)}\int_{\ln(2)}^{2\ln(2)}\frac{dxdy}{xy} = \frac{1}{\big(\ln(2)\big)^2}\int_{\ln(2)}^{2\ln(2)}\Big[\frac{\ln(y)}{x}\Big]_{\ln(2)}^{2\ln(2)}dx \\ &= \frac{1}{\big(\ln(2)\big)^2}\int_{\ln(2)}^{2\ln(2)}\big(\ln 2 + \ln\ln(2) - \ln\ln(2)\big)dx = \frac{1}{\ln(2)}\int_{\ln(2)}^{2\ln(2)}\frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{\ln(2)}\Big[\ln(x)\Big]_{\ln(2)}^{2\ln(2)} = 1 \end{aligned}$$

***Exercice* 0.3.3.4**
Calculer, en utilisant le changement de variables, les intégrales doubles suivantes

1. $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$,
   $D_1 : x^2+y^2 \le 1$.
2. $I_2 = \displaystyle\iint_{D_2}\frac{dxdy}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}}$, *où* D_2 *est la partie du plan comprise entre les ensembles*
   $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\lambda^2 = 0$ *et* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\mu^2 = 0$, $\lambda > \mu > 1$.
3. $I_3 = \displaystyle\iint_{D_3}(1+x^2+y^2)^{-4}dxdy$,
   $D_3 : x^2+y^2 \le R^2$. $I = \dfrac{4\pi}{3}\sqrt{R^3}$
4. $I_4 = \displaystyle\iint_{D_4} 2.(1+\sqrt{x^2+y^2})^{-1}dxdy$,
   $D_4 : -1 \le x \le 0,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le 0.$
   $I_4 = (1-\ln 2).\pi.$

***Corrigé* 0.3.3.4**

1. *Calcul de* $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$, $D_1 : x^2+y^2 \le 1$.
   On pose $x = r\cos(\theta)$, $x = r\sin(\theta)$, *avec* $0 \le r \le 1$ *et* $0 \le \theta \le 2\pi$.
   $I_1 = \displaystyle\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{rdrd\theta}{1+r^2} = 2\pi\Big[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\Big]_0^1 = \pi.\ln(2).$
2. *Calcul de* $I_2 = \displaystyle\iint_{D_2}\frac{dxdy}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}}$, *où* D_2 *est la partie du plan comprise entre les ensembles*
   $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\lambda^2 = 0; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\mu^2 = 0, \lambda > \mu > 1.$$
   On pose $x = ra\cos(\theta)$, $x = rb\sin(\theta)$, *avec* $\mu \le r \le \lambda$ *et* $0 \le \theta \le 2\pi$.
   $$I_2 = \int_\mu^\lambda\int_0^{2\pi}\frac{abrdrd\theta}{\sqrt{r^2-1}} = 2ab\pi\Big[(r^2-1)^{1/2}\Big]_\mu^\lambda = 2ab\pi.\Big(\sqrt{\lambda^2-1}-\sqrt{\mu^2-1}\Big).$$

3. Calcul de $I_3 = \iint_{D_3} (1+x^2+y^2)^{-4} dxdy$, $D_3 : x^2+y^2 \leq R^2$.

   On pose $x = ra\cos(\theta)$, $x = rb\sin(\theta)$, avec $0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

   $$I_3 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{rdrd\theta}{(1+r^2)^4} = -2\pi.\frac{1}{6}\Big[(1+r^2)^{-3}\Big]_0^R = \frac{\pi}{3}\big(1-(1+R^2)^{-3}\big).$$

4. Calcul de $I_4 = \iint_{D_4} 2.(1+\sqrt{x^2+y^2})^{-1} dxdy$, $D_4 : -1 \leq x \leq 0$, $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0$.

   On pose $x = r\cos(\theta)$, $x = r\sin(\theta)$, avec $0 \leq r \leq 1$ et $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.

   $$I_4 = 2\int_0^1 \int_\pi^{3\pi/2} \frac{rdrd\theta}{1+r} = 2\int_0^1 \big(1-\frac{1}{1+r}\big)dr = \pi\Big[r-\ln(1+r)\Big]_0^1 = \pi.(1-\ln(2)).$$

Exercice 0.3.3.5

1. $I_1 = \iint_{D_1} \frac{x+y}{x^2+y^2} dxdy$, $D_1 : 0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \sqrt{1-(x-1)^2}$. $I_1 = \frac{\pi}{2}+1$.

2. $I_2 = \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$,

   $D_2 : 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$. $I_2 = \frac{\pi(e-1)}{4e}$.

3. $I_3 = \iint_{D_3} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dxdy$,

   $D_3 : -1 \leq x \leq 0$, $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0$. $I_3 = \pi$.

4. $I_4 = \iint_D exp\Big(\frac{x^3+y^3}{xy}\Big) dxdy$

   $D_4 = \{(x,y) : y^2 \leq 2px, x^2 \leq 2py\}$, $p > 0$. (poser $x = u^2v$, et $y = uv^2, u \geq 0, v \geq 0$).

Corrigé 0.3.3.5

1. **Première méthode** : On pose $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, avec $0 \leq r \leq 2\cos(\theta)$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

   $$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \Big[\int_0^{2\cos(\theta)} \frac{r(\cos(\theta)+\sin(\theta))}{r^2} rdr\Big] d\theta = \int_0^{\pi/2} \Big[\int_0^{2\cos(\theta)} (\cos(\theta)+\sin(\theta))dr\Big] d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \big(\cos^2(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta)\big)d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \big(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}+\cos(\theta)\sin(\theta)\big)d\theta \\ &= 2\Big[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin(2\theta)+\frac{1}{2}\sin^2(\theta)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}+1. \end{aligned}$$

   Deuxième méthode : On pose $x = 1+r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, avec $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq \pi$. $x^2+y^2 = 1+r^2+2r\cos(\theta)$

   $$J = \int_0^1 \int_0^\pi \frac{r(\cos(\theta)+\sin(\theta))+1}{1+r^2+2r\cos(\theta)} rdrd\theta = \frac{\pi}{2}+1.$$

2. Calcul de $I_2 = \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$, $D_2 : 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$.

   On pose $x = r\cos(\theta)$, $x = r\sin(\theta)$, avec $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

   $$I_2 = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} rdrd\theta = -\frac{\pi}{2}\Big[\frac{e^{-r^2}}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.(1-e^{-1}) = \frac{\pi(e-1)}{4e}.$$

3. *Calcul de* $I_3 = \displaystyle\iint_{D_3} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy$, $D_3 : -1 \leq x \leq 0,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0.$

   On pose $x = r\cos(\theta)$, $x = r\sin(\theta)$, *avec* $0 \leq r \leq 1$ *et* $\pi \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2}$.

   $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{rdrd\theta}{(1+r^2)^2} = \frac{\pi}{4}\int_1^2 \frac{du}{u^2} = \frac{\pi}{4}\Big[-\frac{1}{u}\Big]_1^2 = \frac{\pi}{8}.$

4. $I_4 = \displaystyle\iint_{D_4} exp\Big(\frac{x^3+y^3}{xy}\Big)dxdy$ $D_4 = \{(x,y) : y^2 \leq 2px, x^2 \leq 2py\}$, $p > 0$. *(poser* $x = u^2v$, *et* $y = uv^2, u \geq 0, v \geq 0$*).*

   On pose $f(u,v) = (x,y) = (u^2v, uv^2) = (\phi(u,v), \psi(u,v))$. *Le Jacobien est*

$$detJ_f(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial\phi}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2uv & u^2 \\ v^2 & 2uv \end{vmatrix} = u^2.v^2.$$

   Donc $I_4 = \displaystyle\iint_{U_4} exp(u^3+v^3) \mid J_f(u,v) \mid dudv$, *où* $U_4 = \{(u,v) : 0 \leq u \leq \sqrt[3]{2p}, 0 \leq v \leq \sqrt[3]{2p}\}$.

$$\begin{aligned} I_4 &= \iint_{U_4} exp(u^3+v^3) \mid J_f(u,v) \mid dudv = \int_0^{\sqrt[3]{2p}}\int_0^{\sqrt[3]{2p}} u^2.v^2 exp(u^3+v^3)dudv \\ &= \Big(\int_0^{\sqrt[3]{2p}} w^2 exp(w^3)dw\Big)^2 = \Big(\Big[\frac{1}{3}e^{w^3}\Big]_0^{\sqrt[3]{2p}}\Big)^2 = \frac{1}{9}\big(e^{2p}-1\big)^2. \end{aligned}$$

0.3.4 Applications des intégrales doubles

> ***Exercice* 0.3.4.1**
> *Calculer la masse et le centre de masse et le moment d'inertie par rapport à l'axe* $(x'Ox)$ *de la plaque définie par*
>
> 1. *les courbes* $y = x$ *et* $y = x^2$.
> 2. *les courbes* $x = y^2$ *et* $x = 2y - y^2$ *si la densit ? au point* (x,y) *est* $\delta(x,y) = y + 1$. $\mathcal{A}(D) = 1$.

***Corrigé* 0.3.4.1**

Calcul de la masse et le centre de masse et le moment d'inertie par rapport à l'axe $(x'Ox)$ *de la plaque définie par*

1. *les courbes* $y = x$ *et* $y = x^2$.

   Soit D *le domaine limité par les deux courbes.*

   ⋆ *La masse de* D *est :*

$$M = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dxdy = \int_0^1 \Big[y\Big]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (x - x^2)dx = \Big[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

   ⋆ *Les coordonnées du centre de masse.*

$$M_x = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} ydxdy = \int_0^1 \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2})dx = \Big[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{10}x^5\Big]_0^1 = \frac{1}{15}.$$

$$M_y = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} xdxdy = \int_0^1 \Big[xy\Big]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \Big[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\Big]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Donc les coordonnées sont

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{2},$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{2}{5}.$$

⋆ *Le moment d'inertie par rapport à l'axe $(x'Ox)$ est*

$$I_x = \int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} y^2dxdy = 2\int_0^1 (y^3 - y^5)dy = \frac{1}{6}.$$

$$I_y = \int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} x^2dxdy = 2\int_0^1 (y^3 - y^5)dy = \frac{1}{6}.$$

2. *les courbes $x = y^2$ et $x = 2y - y^2$ si la densité au point (x, y) est $\delta(x, y) = y + 1$.*
   Soit D le domaine limité par les deux coubes.

   ⋆ *La masse de D est* $M = \int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} (y+1)dxdy = \int_0^1 (2y - 2y^3)dy = \frac{1}{2}.$

   ⋆ *Les coordonnées du centre de masse.*

   $M_x = \int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} y(y+1)dxdy = \int_0^1 (2y^2 - 2y^4)dy = \frac{4}{15}.$

   $M_y = \int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} x(y+1)dxdy$

   $= \frac{1}{2}\int_0^1 \big[x^2\big]_{y^2}^{2y-y^2} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \big[(2y-y^2)^2 - y^4\big]dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (4y^2 - 4y^3)dy = \frac{1}{3}..$

   Donc les coordonnées sont

   $$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2}{3}, \text{ et } \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{8}{15}.$$

   ⋆ *Le moment d'inertie par rapport à l'axe $(x'Ox)$ est*

   $$I_x = \int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} y^2(y+1)dxdy = 2\int_0^1 (y^3 - y^5)dy = \frac{1}{6}.$$

***Exercice* 0.3.4.2**

Le but de cet exercice et le calcul de montrer que $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi \ln 2}{8}$. *On donne* $\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{1+y^2}dy = \frac{\pi \ln 2}{8}$

En calculant $J = \iint_D \frac{xdxdy}{(1+x^2)(1+xy)}$ *avec* $D = \{(x, y)$ *tel que* $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ *de deux façons différentes, trouver I.*

***Corrigé* 0.3.4.2**

Première façon

$$\begin{aligned}
J &= \iint_D \frac{xdxdy}{(1+x^2)(1+xy)} = \int_0^1\int_0^1 \frac{xdxdy}{(1+x^2)(1+xy)}\\
&= \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)}\Big[\int_0^1 \frac{dy}{(1+xy)}\Big]dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)}\Big[\ln(1+xy)\Big]_0^1 dx\\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x^2)}dx = I.
\end{aligned}$$

Deuxième façon

$$\begin{aligned}
J &= \iint_D \frac{xdxdy}{(1+x^2)(1+xy)} = \int_0^1\int_0^1 \frac{xdxdy}{(1+x^2)(1+xy)}\\
&= \int_0^1 \Big[\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)(1+xy)}\Big]dy
\end{aligned}.$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)(1+xy)}$ *on détermine a, b et c tels que*

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{ax+b}{1+x^2} + \frac{c}{1+xy}.$$

Par identification on obtient

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{1}{1+y^2}.\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2}.\frac{1}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2}\frac{1}{1+xy}.$$

Alors

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{1}{1+y^2}.\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx + \frac{y}{1+y^2}.\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx - \frac{y}{1+y^2}\int_0^1 \frac{1}{1+xy}dx.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{1}{1+y^2}.\Big[\frac{\ln(1+x^2)}{2}\Big]_0^1 + \frac{y}{1+y^2}.\Big[\arctan(x)\Big]_0^1 - \frac{1}{1+y^2}\Big[\ln(1+xy)\Big]_0^1.$$

On obtient

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{\ln(2)}{2}\frac{1}{1+y^2} + \frac{\pi}{4}.\frac{y}{1+y^2} - \frac{\ln(1+y)}{1+y^2}.$$

On intègre cette dernière expression par rapport à y on obtient

$$J = \frac{\ln(2)}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy + \frac{\pi}{4}.\int_0^1 \frac{y}{1+y^2}dy - \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{1+y^2}dy$$

$$\begin{aligned}
J &= \frac{\ln(2)}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy + \frac{\pi}{4}.\int_0^1 \frac{y}{1+y^2}dy - \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{1+y^2}dy\\
&= \frac{\ln(2)}{2}\Big[\arctan(y)\Big]_0^1 + \frac{\pi}{4}.\Big[\frac{\ln(1+y)}{2}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{1+y^2}dy\\
&= \frac{\ln(2)}{2}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}.\frac{\ln(2)}{2} - \frac{\pi\ln(2)}{8} = \frac{\pi\ln(2)}{8}.
\end{aligned}.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi\ln(2)}{8}.$$

Exercice ***0.3.4.3***

Le but de cet exercice est de montrer que $I = \displaystyle\int_{x=0}^{\pi/2} \frac{\ln(1+\cos(x))}{\cos x}dx\frac{\pi^2}{8}$.

1. *Montrer l'existence de* $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos(x)}dx$.
2. *Montrer que* $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}$.
3. *En déduire la valeur de* I.

Corrigé ***0.3.4.3***

1. *La fonction* $x \to \dfrac{\ln(1+\cos x)}{\cos(x)}$ *n'est pas éfinie en* $\frac{\pi}{2}$.
   Comme $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \ln(1+\cos x)\cos(x) = \lim_{t\to 0} \ln(1+t)t = 1$ *(finie) l'intégrale existe* I *existe.*
2. *Posons* $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin y}{1+\cos x\cos y}dxdy$.
   On a
$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin y}{1+\cos x\cos y}dxdy = \int_0^{\pi/2}\Big[\int_0^{\pi/2} \frac{\sin y}{1+\cos x\cos y}dy\Big]dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos x}\Big[-\ln(1+\cos x\cos y)\Big]_0^{\pi/2}dx = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos x}\Big(\ln(1+\cos x)\Big)dx = I. \end{aligned}$$
3. *En déduire la valeur de* I.
   On a
$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin y}{1+\cos x\cos y}dxdy = \int_0^{\pi/2}\Big[\int_0^{\pi/2} \frac{\sin y}{1+\cos x\cos y}dx\Big]dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin y\Big[\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos x\cos y}\Big]dy = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos x}\Big(\ln(1+\cos x)\Big) = I. \end{aligned}$$
   Posons $t = \cos x$ *alors* $dt = -\sin x dx$ *et*
   $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos x\cos y} = \int_0^{\pi/2}dx - \int_0^{\pi/2}\frac{\cos x\cos y dx}{1+\cos x\cos y} = \frac{\pi}{2} - \cos y\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{1+\cos x\cos y}$
   $t = \cos x\cos y$ $dt = -\sin x\cos y dx$ $dx = -\dfrac{dt}{\sin x\cos y}$
   $-\int_0^{\pi/2}\dfrac{dt}{(1+t.\cos y)\sqrt{1-t^2}}$

0.3.5 Intégrales triples : Coordonnées cartésiennes.

***Exercice* 0.3.5.1**
Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales triples suivantes

1. $I_1 = \int_0^1 \int_{1-x}^{x^2} \int_x^{2x+y} (2x+z)dxdydz,$
2. $I_2 = \int_0^1 \Big(\iint_D (xy+z^2)dxdy \Big) dz, \quad$ *où* $D : x^2 \leq y \leq 1.$

***Corrigé* 0.3.5.1**

1.
$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \int_{1-x}^{x^2} \int_x^{2x+y} (2x+z)dxdydz \\
&= \int_0^1 \Big[\int_{1-x}^{x^2} \Big(2x(2x+y) + \frac{(2x+y)^2}{2} - 2x^2 - \frac{x^2}{2} \Big) dy \Big] dx \\
&= \int_0^1 \Big[\int_{1-x}^{x^2} \Big(\frac{7x^2}{2} + 4xy + \frac{y^2}{2} \Big) dy \Big] dx = \int_0^1 \Big[\frac{7x^2}{2} y + 2xy^2 + \frac{y^3}{6} \Big]_{1-x}^{x^2} dx \\
&= \int_0^1 \Big(\frac{x^6}{6} + 2x^5 + \frac{7x^4}{2} + \frac{3x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{(1-x)^3}{6} \Big) dx \\
&= \Big[\frac{x^7}{42} + \frac{x^6}{3} + \frac{7x^5}{10} + \frac{3x^4}{8} + \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{(1-x)^4}{24} \Big]_0^1 = \frac{39}{70}
\end{aligned}.$$

2. $I_2 = \int_0^1 \Big(\iint_D (xy+z^2)dxdy \Big) dz, \quad$ *où* $D : x^2 \leq y \leq 1.$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \Big(\iint_D (xy+z^2)dxdy \Big) dz = \int_0^1 \Big[\int_{-1}^1 \Big(\int_{x^2}^1 (xy+z^2)dy \Big) dx \Big] dz \\
&= \int_0^1 \Big[\int_{-1}^1 \Big[\frac{xy^2}{2} + yz^2 \Big]_{x^2}^1 dx \Big] dz = \int_0^1 \Big[\int_{-1}^1 \Big(\frac{x}{2} + z^2 - \frac{x^5}{2} - x^2z^2 \Big) dx \Big] dz \\
&= \int_0^1 \Big[2 \int_0^1 (z^2 - x^2z^2) dx \Big] dz = 2 \int_0^1 \Big[z^2x - \frac{x^3z^2}{3} \Big]_0^1 dz \\
&= 2 \int_0^1 (z^2 - \frac{z^2}{3}) dz = \frac{4}{9}.
\end{aligned}.$$

***Exercice* 0.3.5.2**
Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales triples suivantes

1. $I_1 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2+y^2+z^2)dxdydz,$ $\quad I_1 = 1.$
2. $I_2 = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{3y} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dydxdz,$ $\quad I_2 = -6.$
3. $I_3 = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 y\sin(z)dxdydz,$ $\quad I_3 = \frac{\pi^3}{2}(1-\cos(1)).$

***Corrigé* 0.3.5.2** 1. *Calcul de* I_1 *:*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2+y^2+z^2)dxdydz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2+y^2+\frac{1}{3})dxdy \\ &= \int_0^1 (x^2+\frac{2}{3})dx = 1. \end{aligned}$$

2. *Calcul de* I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{3y} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dydxdz \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{3y} (8-2x^2-4y^2)dxdy \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \left[8x-\frac{2}{3}x^3-4xy^2\right]_0^{3y} dx = -6 \end{aligned}$$

3. *Calcul de* I_3

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 y\sin(z)dxdydz \\ &= \Big(\int_0^{\pi} dx\Big).\Big(\int_0^{\pi} ydy\Big)\Big(\int_0^1 \sin(z)dz\Big) \\ &= \pi.\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^{\pi}.\Big[-\cos(z)\Big]_0^1 = \frac{\pi^3}{2}(1-\cos(1)). \end{aligned}$$

0.3.6 Intégrales triples : Changement de variables

***Exercice* 0.3.6.1**
Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales triples suivantes

1. $I_1 = \iiint_{D_1} (x+y+z)dxdydz,$ *où* $D_1 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2, z \geq 0.$
2. $I_2 = \iiint_{D_2} zxy\sqrt{x^2+4y^2}dxdydz$ *où* $D_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ *et* $0 \leq z \leq 1\}.$

***Corrigé* 0.3.6.1**

1. $I_1 = \iiint_{D_1} (x+y+z)dxdydz,$ *où* $D_1 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2, z \geq 0.$

   On passe aux coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = r\cos(u)\cos(v), & 0 \leq r \leq R \\ y = r\sin(u)\cos(v), & 0 \leq u \leq 2\pi \\ z = r\sin(v), & 0 \leq v \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

   On a $dxdydz = r^2\cos(v)drdudv$ *donc*

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_{D_1} (x+y+z)dxdydz \\ &= \int_0^R \Big[\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\pi/2} r^3(\cos(u)\cos(v) + sin(u)\cos(v) + \sin(v))dv\Big)du\Big]dr \\ &= \Big(\int_0^R r^3 dr\Big)\Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\pi/2} r^3(\cos(u)\cos(v) + \sin(u)\cos(v) + \sin(v))dv\Big)du\Big) \\ &= \Big(\int_0^R r^3 dr\Big).\Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\pi/2} \sin(v)dv\Big)du\Big) \\ &= \frac{R^4}{4}.2\pi.\big(\textstyle\int_0^{\pi/2}\sin(v)dv\big) = \dfrac{\pi.R^2}{2}.\Big[-\cos(v)\Big]_0^{\pi/2} = \dfrac{\pi.R^2}{2}. \end{aligned}$$

   On a utilisé le fait que

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\pi/2}(\cos(u)\cos(v)+\sin(u)\cos(v))dv\Big)du &= \textstyle\int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{2\pi}(\cos(u)\cos(v)+\sin(u)\cos(v))du\Big)dv \\ &= \textstyle\int_0^{\pi/2}\Big[\cos(v)(\sin(u)+\cos(u))\Big]_0^{2\pi}dv = 0 \end{aligned}.$$

2. $I_2 = \iiint_{D_2} zxy\sqrt{x^2+4y^2}dxdydz$ *où* $D_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ *et* $0 \leq z \leq 1\}.$

   On passe aux coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r\cos(u), & 0 \leq r \leq 1 \\ y = r\sin(u), & 0 \leq u \leq \pi/2 \\ z = t), & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

   On a $dxdydz = rdrdudv$ *donc*

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_{D_2} zxy\sqrt{x^2+4y^2}dxdydz \\ &= \int_0^1 \Big[\int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^1 t.r^4.(\cos(u)\sin(u)\sqrt{1+3\sin^2(u)})du\Big)dt\Big]dr \\ &= \Big(\int_0^1 tdt\Big).\Big(\int_0^1 r^4 dr\Big).\Big(\int_0^{\pi/2}(\cos(u)\sin(u)\sqrt{1+3\sin^2(u)})du\Big) \\ &= \Big[\frac{t^2}{2}\Big]_0^1.\Big[\frac{r^5}{5}\Big]_0^1.\Big[\cos(u)\sin(u)\sqrt{1+3\sin^2(u)}\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2}.\frac{1}{5}.\Big[\frac{2}{9}(1+3\sin^2(u))^{3/2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{7}{45}. \end{aligned}$$

Exercice 0.3.6.2

Calculer les intégrales triples suivantes

1. $I_1 = \iiint_{D_1} z^2 dxdydz, \quad D_1 : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h.$
2. $I_2 = \iiint_{D_2} \dfrac{dxdydz}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}}, \quad D_2 : b^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2.$

   on rappelle que : $\displaystyle\int \frac{r^2 dr}{\sqrt{1+r^2}} = 2\pi.\frac{1}{2}.\Big[r\sqrt{1+r^2} - \sinh^{-1}(r)\Big].$

Corrigé 0.3.6.2

1. $I_1 = \iiint_{D_1} z^2 dxdydz, \quad D_1 : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h.$

   On fixe (x, y) dans $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq R^2\}$ projection de l'intersection du plan z avec le domaine D_1 et on passe aux coordonnées polaires.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^h z^2 \Big[\iint_{U_1} dxdy\Big] dz \\ &= \Big(\int_0^h z^2 dz\Big)\Big(\int_0^R \int_0^{2\pi} r dr d\theta\Big) \\ &= \Big[\frac{z^3}{3}\Big]_0^h .2\pi. \Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^R = \frac{\pi R^2 h^3}{3}. \end{aligned}$$

2. $I_2 = \iiint_{D_2} \dfrac{dxdydz}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}}, \quad D_2 : b^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2.$

   On passe aux coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = r\cos(u)\cos(v), & b \leq r \leq a \\ y = r\sin(u)\cos(v), & 0 \leq u \leq 2\pi \\ z = r\sin(v), & 0 \leq v \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

   On a $dxdydz = r^2 \cos(v) drdudv$ et on pose $U_2 = [b, a][0, 2\pi][-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Donc

$$\begin{aligned} I_2 &= \iiint_{U_2} \frac{r^2 \cos(v) drdudv}{\sqrt{1+r^2}} \\ &= 2\pi.\Big[\sin(v)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_b^a \frac{r^2 dr}{\sqrt{1+r^2}}\Big) = 2\pi.\frac{1}{2}.\Big[r\sqrt{1+r^2} - \sinh^{-1}(r)\Big]_b^a \\ &= \pi.\big(a\sqrt{1+a^2} - \sinh^{-1}(a) - b\sqrt{1+b^2} + \sinh^{-1}(b)\big). \end{aligned}$$

0.3.7 Applications des intégrales triples.

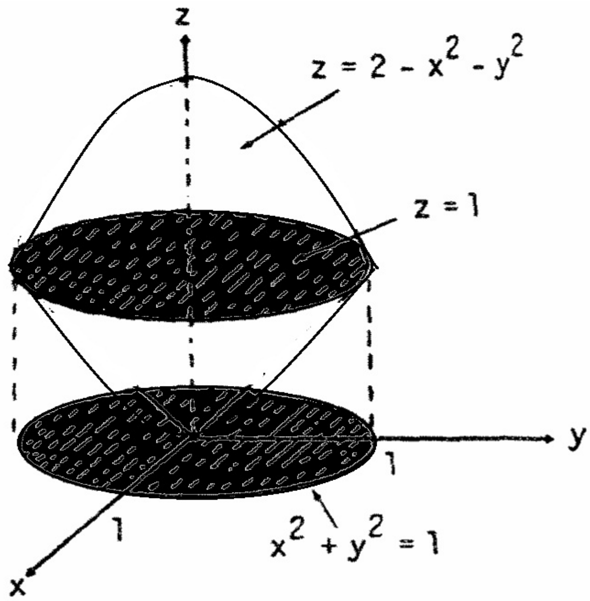
Exercice 0.3.7.1

Calculer V le volume du domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ limite par les paraboloïdes d'équations $z = x^2 + y^2$ et $z = 2 - x^2 - y^2$.

Corrigé 0.3.7.1

Calcul du volume V du domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ limité par les paraboloïdes d'équations $z = 2 - x^2 - y^2$ et $z = x^2 + y^2$.

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dxdydz \\
&= 4.\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dxdydz \\
&= 4.\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \left(2 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2\right)dxdy \\
&= 8.\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - (x^2 + y^2)\right)dxdy \\
&= 8.\int_{0}^{1}\int_{0}^{\pi/2} (1 - r^2)rdrd\theta \\
&= 8.\int_{0}^{\pi/2} \Big[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big]_0^1 d\theta = \pi
\end{aligned}$$



Autre méthode. *On fixe (x, y) dans D le projection de Ω sur le plan $z = 0$.*

On a $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

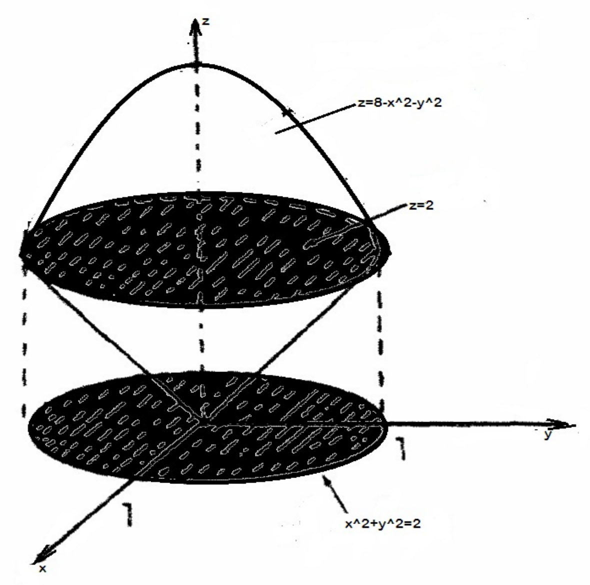
$$\begin{aligned}
V &= \iint_D \Big[\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dz\Big]dxdy = 2\iint_D (1 - x^2 - y^2)dxdy \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2)rdrd\theta = 4\pi.\int_0^1 (r - r^3)dr = 4\pi.\Big[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big]_0^1 = \pi.
\end{aligned}$$

Exercice 0.3.7.2
$I_2 = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)dydxdz$, où Ω est le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par les paraboloïdes $z = 8 - x^2 - y^2$ et $z = x^2 + y^2$.

Corrigé 0.3.7.2

Calcul de I_2.

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dydxdz \\
&= \iint_D \Big[\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2}(x^2+y^2)dz\Big]dxdy \\
&= 2.\iint_D \Big[(x^2+y^2)(4-x^2-y^2)\Big]dxdy \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi} r^2(4-r^2)rdrd\theta \\
&= 4\pi.\int_0^2 r^3(4-r^2)dr = 4\pi.\Big[r^4-\frac{1}{6}r^6\Big]_0^2 \\
&= \frac{64}{3}\pi
\end{aligned}
$$



Exercice ***0.3.7.3***
Calculer V le volume du domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ limite par la paraboloïdes d'équation $z=4-4(x^2+y^2)$ et la surface d'équation $z=(x^2-y^2)^2-1$.

Corrigé ***0.3.7.3***
Calcul du volume V du domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ limite par la paraboloïdes d'équation $z=4-4(x^2+y^2)$ et la surface d'équation $z=(x^2-y^2)^2-1$. $V=\frac{8.\pi}{3}$.

On pose $x=r\cos(\theta)$, $y=r\sin(\theta)$ et $z=t$. Alors $dxdydz=r.dr.d\theta.dt$

$$
\begin{aligned}
V &= 4.\int_0^{\pi/2}\int_0^1\Big[\int_{r^2-1}^{4-4r}\big[rdt\big]dr\Big]d\theta \\
&= 4.\textstyle\int_0^{\pi/2}\big[\int_0^1\int_0^1(5r-4r^3-r^5)dr\big]d\theta \\
&= 4.\int_0^{\pi/2}\big(-\frac{5}{2}-1-\frac{1}{6}\big)\theta = 4.\int_0^{\pi/2}d\theta = \frac{8\pi}{3}
\end{aligned}
$$